流体工学セミナー (球の抵抗測定)

機械工学科　飯田明由

２年生の実験で球に働く空気抵抗を測定しました．この実験データをもとに上空に投げ上げた球がどのように飛行するか，数値計算によって計算します.

運動方程式

水平方向の距離を x, 鉛直方向の距離を y とし, x 方向, y 方向の速度をそれぞれ V_x, V_y とします.
今, 質量 m の物体に働く加速度を $\alpha=(\alpha_x, \alpha_y)$とすると空気抵抗がない場合に物体に作用する力は

$$
\begin{aligned}
F_x &= ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV_x}{dt} \\
F_y &= ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dV_y}{dt}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

とあらわすことができます．時刻 t=0 における物体の速度を(V_{x0}, V_{y0})，初期位置を(x_0, y_0) とし，物体には常に重力加速度が下向きに作用するとして，式(1)を解くと

$$
\begin{aligned}
V_x(t) &= V_{x0} \\
V_y(t) &= V_{y0} - \mathrm{g}t \\
x(t) &= x_o + V_{xo}t \\
y(t) &= y_o + V_{yo}t - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となります．式(2)は空気抵抗がまったく働かない場合の球の軌跡を示しています．(高校の物理を思い出してください．)
一方，実際の空気中を飛んでいる球の場合は，２年生の実験で行ったように空気抵抗が作用します．空気抵抗は速度の 2 乗に比例することを思い出してください．抵抗係数は *Reynolds* 数に比例しますが，ここでは簡単のため，抵抗係数を C_d=0.4 で一定であると仮定すると，空気抵抗を考慮した場合の加速度αは

$$
\begin{aligned}
ma_x &= -\frac{1}{2}\rho A C_d V V_x \\
ma_y &= -m\mathrm{g} - \frac{1}{2}\rho A C_d V V_y \\
V &= \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

と表すことができます．この式を解析的に解くのは難しいので，数値計算によって解を求める方法を考えます.
時刻 t において位置 $x(t)$にあった物体がΔt 後の時刻 t+1 において $x(t+1)$に移動したとする. このとき物体の速度は，微分の定義より,

$$
\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{x(t+1) - x(t)}{\Delta t}
\tag{4}
$$

と表すことができます．この式からΔt を十分小さくとれば，

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t = x(t) + V_x \Delta t \\
y(t+1) &= y(t) + \frac{dy}{dt}\Delta t = y(t) + V_y \Delta t
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

また，加速度は

$$
\begin{aligned}
a_x(t+1) &= -CV_x(t)V(t) \\
a_y(t+1) &= -\mathrm{g} - CV_y(t)V(t)
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

となるから，つぎの時刻における速度は

$$
\begin{aligned}
V_x(t+1) &= V_x(t) + \frac{dV_x}{dt}\Delta t = V_x(t) + a_x \Delta t \\
V_y(t+1) &= V_y(t) + \frac{dV_y}{dt}\Delta t = V_y(t) + a_y \Delta t
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

と表すことができます．ここで球の直径と質量を適当に仮定して $C=(1/2\rho C_d A)/m$ を定数としました．式(5)から（7）を用いることにより，ある時刻における速度と位置から将来の座標点を求めることができます．今，球を投げ上げる瞬間(t=0)を基準とし，球を投げ上げる初期速度および初期位置を既知の値として，式（5）～（7）の計算を繰り返し行うことにより空気抵抗がある場合のボールの軌道を計算することができます．ここで数値計算上の工夫としては，計算を進めていく過程で，将来の値として計算された時刻 t+1 における速度，位置座標，加速度を次のタイムステップでは現在の値とすることです．

式（5），（7）はオイラー法と呼ばれる微分方程式の数値解析手法であり，微分方程式の解法としては最も簡単なで，基本的な手法である．

今回の演習では JAVA を用いて球の飛行軌道を求めるプログラムを作成します．サンプルプログラムの一部は？？？で表されていますから，その部分はこのテキストを参考に各自正しい記述に変更してください．製作したプログラムを使って打ち上げ角度を 10 度から 60 度まで変化させた場合の飛翔軌道を計算することができます．空気抵抗がない場合は，45 度の角度で投げ上げた場合に最も遠くまで飛びますが, 空気抵抗がある場合は, どのようになるか検討してみてください．ただし，重力加速度は 9.8m/s^2，初速度 V_o=40m/s，C=0.01 とします．C を変えた計算も試してみると良いでしょう．

プログラム **Ball.java**

```
import java.awt.*;
import java.lang.Math;
class  Ball {
          public static void main(String args[]){

          double G=???????   /*力加速度*/
          double PI=3.1415;  /*円周率 */
          double vo=?????;   /* 初速度*/
          double C=??????;   /*空気抵抗定数*/
          double dt=0.01;    /*時間の刻み*/
          double x,y,v,vx,vy,ax,ay,s,t;
```

```
            int q;
             t=0.0;
            /*角度を変えて計算する*/
            for(q=?????;q<=?????;q=?????)
            {
                        /*データの初期化*/
                        x=?????;
                        y=?????;
                        t=?????;

                        /*ベクトルの成分計算*/
                        vx=vo*Math.cos((double)q*PI/180.0);
                        vy=?????;

                        /*加速度の計算*/
                        ax=-C*vo*vx;
                        ay=????????;

                        /* 速度の計算 初期値のみ dt/2 で計算*/
                        vx=vx+ax*(dt/2);
                        vy=vy+ay*(dt/2);
                        System.out.println("");
                        System.out.println("計算開始　角度"+q);

                        /*  y>=0 になるまで計算を続ける*/
                        while(y>=0)
                        {
                                    /*座標の計算：オイラー法*/
                                    x=x+vx*dt;
                                    y=y+vy*dt;
                                    v=Math.sqrt(vx*vx+vy*vy);

                                    /*加速度の計算*/
                                    ax=-C*vx*v;
                                    ay=-g-C*vx*v;

                                    /*速度の計算*/
                                    vx=???????;
                                    vy=vy+ay*dt;

                                    /*時間を進める*/
                                    t += dt;

                                    /*結果を出力*/
                                    System.out.println("時刻 t= "+t+" X= "+x+" Y= "+y);
                        }
            }

}
}
```

プログラムの実行方法.

コマンドプロンプトを起動し，

javac Ball.java ↲

エラーが無ければ何も表示されない．コンパイルが正しくできた場合，コマンドプロンプト上で

java Ball ↲

とタイプするとプログラムが実行され．画面に数列が表示される．ファイルにデータを保存する場合は

java Ball > data1.dat↲

とタイプする．データは ***data1.dat*** に書き込まれるので，EXCELL 等を用いてグラフを作成する．