流れ学 I 及演習　レジュメ（公式集）

2007 年度前期

1　静水力学

重力場における静止流体中で鉛直上向きに z 軸ととるとき，**高さと圧力の関係**は

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{1}$$

で表される。ここに ρ は密度，g は重力加速度である。負号に注意のこと。あるいは簡単に

$$\Delta p = \rho g h \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{2}$$

と書いても同じである。ここで圧力差 Δp と高さの差 h は，いずれも絶対値を表しているものとし，鉛直方向の低い位置の圧力が高いということを忘れないで適用することが必要である。これらの関係は密度一定の条件のもとでのみ成り立つことに注意が必要である。つまり，途中で流体の種類が変化するときは，その境界までの均質な流体について (2) 式を，他の流体について別の密度で (2) 式を立てる必要がある。

2　連続の式

定常な流れに対して，**質量保存の法則**に基づく**連続の式**(continuity equation) は

$$G = \rho A v = \mathrm{const.} \qquad [\mathrm{kg/s}] \tag{3}$$

ここで G は**質量流量**[kg/s] で，単位時間当たりに断面を通過する質量である。ρ は密度，A は流路の断面積，v は断面の平均速度である。あるいは断面 1 と 2 の間で

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad [\mathrm{kg/s}] \tag{4}$$

とも書くことができる。流体が**非圧縮**と見なせる場合には，ρ が一定だということだから，

$$Q = A v = \mathrm{const.} \qquad [\mathrm{m^3/s}] \tag{5}$$

ここで Q は**体積流量**あるいは単に流量と呼ばれ，単位時間あたりに断面を通過する体積である。あるいは

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad [\mathrm{m^3/s}] \tag{6}$$

とも書ける。

3　ベルヌーイの式

断面 1 から断面 2 にいたる流れにおいて，損失やエネルギの出入りのない場合には，**力学的エネルギ保存則**が成り立つ。

$$E_1 = E_2 \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{7}$$

ここに，E_1，E_2 はそれぞれ，断面 1，2 における単位質量あたりの流体が持っている力学的エネルギ，ないし**比エネルギー**(specific energy) で，

$$E_1 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \quad [\mathrm{J/kg}], \quad E_2 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad [\mathrm{J/kg}] \tag{8}$$

である。右辺はそれぞれ，単位体積あたりの運動エネルギ，圧力のエネルギ，位置のエネルギである。（各項の単位は [J/kg]，あるいは [$\mathrm{m^2/s^2}$]）

あるいは

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{9}$$

と書くこともできる。通常この式を**ベルヌーイの式**(Bernoulli's formula) という。この式に密度をかけたものは圧力の次元をもち，

$$\frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{10}$$

両辺の第 1 項は動圧，第 2 項は静圧，第 3 項は静水圧を表している。これらの合計は**総圧**あるいは**全圧**(total pressure) と呼ばれる。また，ベルヌーイの式 (9) の各項を重力加速度 g で割った表現

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \qquad [\mathrm{m}] \tag{11}$$

においては，第 1 項は速度水頭 (velocity head)，第 2 項は圧力水頭 (pressure head)，第 3 項は位置水頭 (position head) と呼ばれ，その合計は**全水頭**(total head) と呼ばれる。式 (9)，(10)，(11) はいずれもベルヌーイの式であるが，密度をかけたり重力加速度で割ったりすることで物理的な意味が異なってくる。

4　エネルギーの式

損失やエネルギ授受が発生する場合には，ベルヌーイの式を拡張したエネルギーの式が必要になる。

$$E_1 + E_{\mathrm{in}} = E_2 + E_{\mathrm{out}} + E_l \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{12}$$

これを**拡張ベルヌーイ式**または**エネルギー式**という。ここに，E_1, E_2 は式 (8) で定義された入口，出口における比エネルギーであり，$E_{\rm in}$ は断面 1 から 2 にいたるまでの間に持ち込まれるエネルギ，$E_{\rm out}$ は出ていくエネルギ，E_l は損失エネルギである。これらはすべて単位質量あたりのエネルギーであり，力学的エネルギーのみを対象としている。損失 E_l が存在するときには力学的エネルギーが熱的エネルギーに変換されている。これは

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + E_{\rm in} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + E_{\rm out} + E_l \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{13}$$

と書いても同じである。式 (12) または式 (13) は**エネルギー式**あるいは**拡張ベルヌーイの式**と呼ばれることもある。式 (13) の各項に質量流量を掛けると動力になり，

$$\rho Q(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + E_{\rm in}) = \rho Q(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + E_{\rm out} + E_l) \qquad [\mathrm{W}] \tag{14}$$

で表される。断面 1 から 2 までの間につぎ込まれる動力を $P_{\rm in}$，外になす動力を $P_{\rm out}$，損失により失われる動力を P_l とすると

$$\rho Q(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1) + P_{\rm in} = \rho Q(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2) + P_{\rm out} + P_l \qquad [\mathrm{W}] \tag{15}$$

のように書くことができる。$\eta P_{\rm out}$ は水車により取り出される動力，$P_{\rm in}/\eta$ はポンプの軸動力である。（η は効率）

5　運動量保存の法則

あらかじめ定められた検査空間に流入する流体の単位時間当たりの運動量が流出するときに変化したとすれば，それは流体が検査空間内で力を受けたからである。力や流入流出運動量はベクトル量であることに注意する。ある断面を通過する単位時間当たりの運動量は，質量流量と速度（ベクトル）を掛け合わせたものである。単位時間当たり，検査空間に流入する運動量を $\vec{M}_{\rm in}$，流出する運動量を $\vec{M}_{\rm out}$ とすると，

$$\vec{M}_{\rm in} = G\vec{V}_{\rm in}, \quad \vec{M}_{\rm out} = G\vec{V}_{\rm out} \tag{16}$$

ただし G は質量流量，$\vec{V}$ は速度ベクトルである。この内部の流体に働く力の合計を $\vec{F}$ とすると，定常な流れに対する**運動量保存の法則**(momentum conservation law) は

$$\vec{M}_{\rm out} - \vec{M}_{\rm in} = \vec{F} \tag{17}$$

ここで $\vec{F}$ は，検査空間内の流体に働くすべての力の合計で，

$$\vec{F} = \vec{F}_{cs} + \vec{F}_m + \vec{F}_r \tag{18}$$

ここに

$\vec{F}_{cs}$　検査面を通じて検査空間内の流体に加わる力。主として圧力による力である。

$\vec{F}_m$　質量力。普通は重力による力であるが，ときには遠心力やコリオリの力などが加えられることもある。

$\vec{F}_r$　物体表面から受ける力

である。これらの $\vec{F}_{cs}, \vec{F}_m, \vec{F}_r$ はすべて検査空間内の流体が受ける力であると定義されている点に注意する。したがって，物体が流体から受ける力は $-\vec{F}_r$ である。

6　レイノルズ数

流体の運動において，慣性力と粘性力の比を表す無次元数を**レイノルズ数** (Reynolds number) と呼び，

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} = \frac{VL}{\mu/\rho} \tag{19}$$

で表される。ここに $\nu \equiv \mu/\rho$ は**動粘度**(kinematic viscocity)，V は代表速度，L は代表長さである。

円管内の流れでは，平均流速を V，管内径を d とするとき

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Vd}{\mu/\rho} \tag{20}$$

となり，$\mathrm{Re}_{cr} = 2300$ を境に，それ以下では層流，それ以上では乱流になる。このように，層流と乱流の境界になるレイノルズ数 Re_{cr} のことを**臨界レイノルズ数**(critical Reynolds number) という。

臨界レイノルズ数は物体によって異なるので注意されたい。$\mathrm{Re}_{cr} = 2300$ は円管の場合で，たとえば球の周りの流れでは $\mathrm{Re}_{cr} = 5 \times 10^5$ 程度である。

7　管路損失とその他の損失

7.1　直円管の損失

流体が管路を流れるときに摩擦により損失が発生し，これにより圧力が低下する。損失による圧力低下，あるいは**圧力損失**(pressure loss) は

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v^2 \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{21}$$

により与えられる。これは**ダルシー・ワイスバッハの式**または**ダルシーの式**と呼ばれる。ここで，λ は管摩擦係数，d は管の内径，l は管の延長，ρ は密度，v は管内の平均流速である。管摩擦係数は，層流では 64/Re であるが，乱流の場合には理論的には与えられておらず，実験結果を基に作られた**ムーディー線図**により求められる。なお，層流と乱流の境目となるレイノルズ数を**臨界レイノルズ数**(critical Reynolds number) といい，円管内の流れでは 2300 程度であることはすでに述べた。ベルヌーイの式のところで述べたのと同様に，単位質量当たりの**損失エネルギー**(loss energy) は

$$E_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{22}$$

のように表されるし，**損失水頭**(loss head) は

$$H_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \qquad [\mathrm{m}] \tag{23}$$

ということになる。

7.2　さまざまな管路損失

管路の中に存在する様々な障害物による損失は流体の持つ運動エネルギ $v^2/2$ あるいは動圧 $(\rho/2)v^2$ を基準にして表現される。たとえば，曲がりによる損失は，曲がり損失係数 ζ_b を用いて単位質量あたりの流体が失うエネルギ（損失エネルギ）を

$$\Delta E_{lb} = \zeta_b \frac{v^2}{2} \qquad [\mathrm{J/kg}] \tag{24}$$

のように表せるし，圧力損失なら

$$\Delta p_b = \zeta_b \frac{\rho}{2} v^2 \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{25}$$

のようになる。曲がり損失係数 ζ_b は，通常便覧等を参照して適切な値を設定することになる。同様に，弁を通過するときの損失は

$$\Delta E_{lv} = \zeta_v \frac{v^2}{2} \qquad [\mathrm{J/kg}] \qquad \text{ないし} \qquad \Delta p_{lv} = \zeta_v \frac{\rho}{2} v^2 \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{26}$$

となる。ここで，弁損失係数 ζ_v は，やはり便覧等で弁の形式や開度に応じて与えられる。もちろん，これらの抵抗要因が複数箇所あればその箇所数倍の抵抗が働く。

8　流体から受ける力

流れの中に置かれた物体が流体から受ける力は，流れ方向の力すなわち**抗力**D と，流れに垂直な方向の力すなわち**揚力**L とに分けて考えるのが便利である。抗力，揚力は係数 C_D，C_L を用いて

$$D = C_D A \frac{\rho}{2} v^2 \qquad [\mathrm{N}] \tag{27}$$

$$L = C_L A \frac{\rho}{2} v^2 \qquad [\mathrm{N}] \tag{28}$$

のように表す。

C_D を**抗力係数**，C_L を**揚力係数**と呼ぶ。C_D と C_L は物体の形状とレイノルズ数によって異なる。

A は通常の物体では前方投影面積をとるが，翼の場合は特別に翼面積をとる。

基礎的事項の確認

1. 1 章で述べた静力学の式と，3 章で述べたベルヌーイの式との関係を説明せよ。
2. エネルギー損失があるときには，連続の式は成り立つか。
3. ベルヌーイの式を 3 通りの式で示し，それぞれの次元 (単位) と意味するところを述べよ。
4. レイノルズ数とは何か。式と物理的意味を述べよ。
5. ダルシー・ワイスバッハの式を 3 通りの式で示し，それぞれの次元 (単位) と意味するところを述べよ。