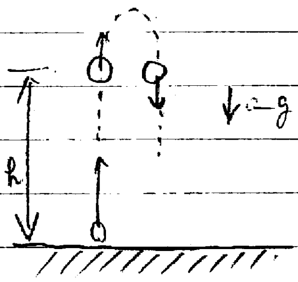
工業力学及演習

復習問題 (2)

No. 1

問題1



上向きを正とする
運動学的に解く. 小球の位置を x で表すと.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dx}{dt} = v - gt \qquad v：初速度$$

$$x = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

高さ h のとき

$$h = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 - vt + h = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{v \pm \sqrt{v^2-2gh}}{g}$$

このとき

$$\frac{dx}{dt} = v - g\cdot\frac{v \pm \sqrt{v^2-2gh}}{g}$$

$$= \mp\sqrt{v^2-2gh} \quad \cdots\cdots (答)$$

(上向き、下向き 両方あり得る)

力学エネルギ保存で解く.

高さ h の位置での速度を V とする. 力学エネルギ保存により

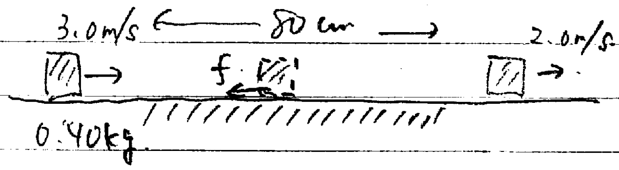
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + mgh$$

$$\Leftrightarrow V^2 = v^2 - 2gh$$

$$\Leftrightarrow V = \pm\sqrt{v^2-2gh} \quad \cdots\cdots (答)$$

問題2

粗い面で受ける仕事をWとする



力学エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\times 0.40\,\mathrm{kg}\times(2.0\,\mathrm{m/s})^2-\frac{1}{2}\times 0.40\,\mathrm{kg}\times(3.0\,\mathrm{m/s})^2=W$$

$$\Leftrightarrow\ W=-1.0\,\mathrm{J}\quad\cdots(答)$$

動まさつ係数を μ_k とすると

$$-\mu_k\, m g\, l = W$$

$$-\mu_k\times 0.40\,\mathrm{kg}\times 9.81\,\mathrm{m/s^2}\times 0.80\,\mathrm{m}=-1.0\,\mathrm{J}$$

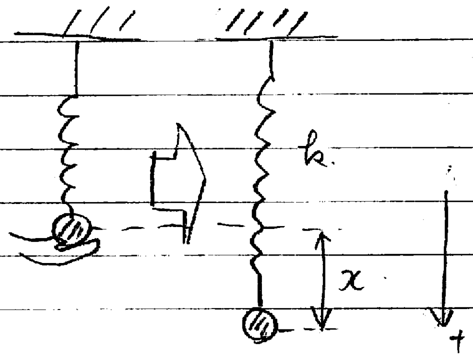
$$\Leftrightarrow\ \mu_k=0.32\quad\cdots(答)$$

問題3

ばね定数を k とする。
伸びてつり合ったときのつり合いの式

$$mg - kx = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{mg}{x} \quad \cdots (答)$$



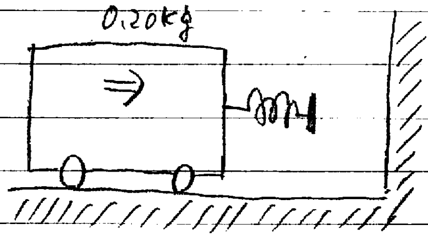
つり合うまでに重力がした仕事　mgx　…(答)

つり合いの状態の弾性エネルギー　$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mgx$　…(答)

(残り半分は手がした仕事)

問題7

右向き正とする.



衝突前の運動量

$0.20\,\mathrm{kg} \times 20\,\mathrm{m/s} = 4.0\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ …(答)

衝突後の運動量

$0.20\,\mathrm{kg} \times (-16\,\mathrm{m/s}) = -3.2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$

受けた力積は、運動量保存則により

$-3.2\,\mathrm{kg\cdot m/s} - 4.0\,\mathrm{kg\cdot m/s} = -7.2\,\mathrm{kg\cdot m/s} = -7.2\,\mathrm{N\cdot s}$ …(答)

衝突の前後で速度が変化しているので、運動エネルギーも変化している.
この差がばねの変形に使われたエネルギーだと考えて.

$\frac{1}{2} \times 0.20\,\mathrm{kg} \times (20\,\mathrm{m/s})^2 - \frac{1}{2} \times 0.20 \times (16\,\mathrm{m/s})^2$

$= 14\,\mathrm{J}$ ……(答)

No.

問題 8

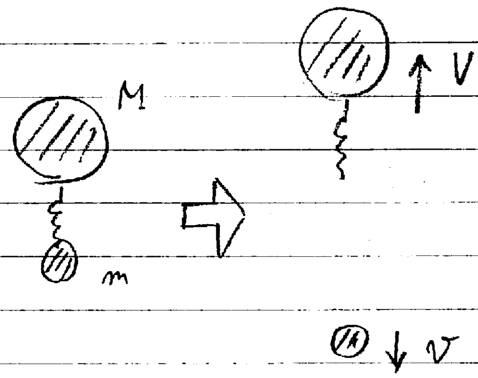
角運動量保存則により

$$I\omega_2 - I\omega_1 = \overline{T}\,t$$

$$0.058\,\mathrm{kg\cdot m^2}\left(400\times\frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s} - 2000\times\frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s}\right) = \overline{T}\times 5.0\,\mathrm{s}$$

$$\Leftrightarrow \overline{T} = -1.9\ \mathrm{N\cdot m} \quad \cdots\cdots(答)$$

問題9



運動量保存則により

$$MV - mv = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{M}{m}V \quad \text{…(答)}$$

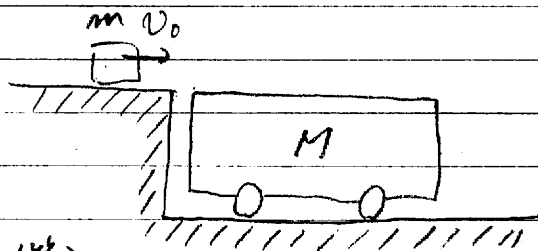
ばねに蓄えられていたエネルギーは、
力学エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}V\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m}V^2 \quad \text{…(答)}$$

問題10



一体となって動くときの速度を
Vと書く。運動量保存則より

$$m v_0 + 0 = mV + MV$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{m}{m+M} v_0 \quad \cdots\cdots(答)$$

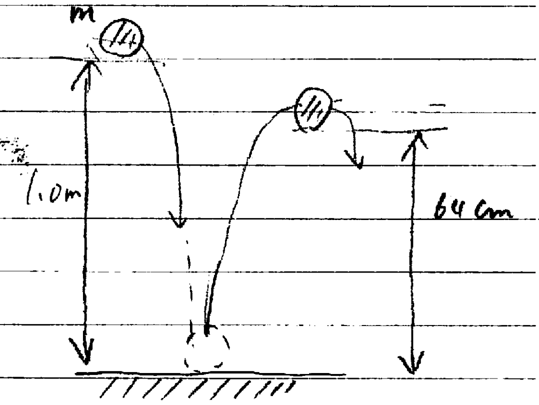
まさつによって失われたエネルギーは、前後のエネルギー変化に等しいから
力学エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M} v_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{m+M} v_0^2$$

$$= \frac{mM}{2(m+M)} v_0^2 \quad \cdots\cdots(答)$$

問題11



床に衝突する直前の速度を v とする。
力学エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.81\,m/s^2 \times 1.0\,m}$$

$$= 4.4\,m/s$$

衝突後の速度も同様にして

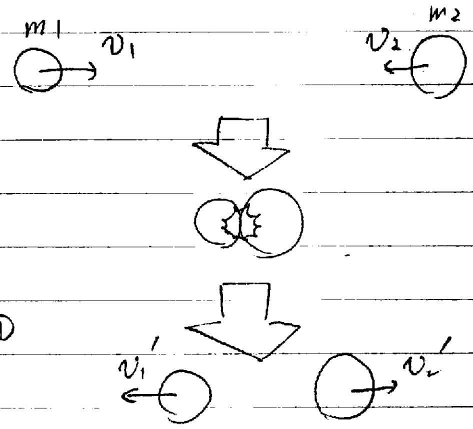
$$v = \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.64\,m}$$

$$= 3.5\,m/s$$

よって反発係数は

$$\frac{3.5\,m/s}{4.4\,m/s} = 0.80 \quad \cdots\cdots(答)$$

問題 12



右図のように記号を定める。
但し 右向きを正とする。

運動量保存則より

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \cdots ①$$

反発の法則より

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \quad \cdots ②$$

①,②を連立させて解く。まず②より

$$v_2' - v_1' = -e(v_2 - v_1) \Leftrightarrow v_2' = v_1' - e(v_2 - v_1)$$

これを①に代入して

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2\{v_1' - e(v_2 - v_1)\}$$

$$\Leftrightarrow v_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + em_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + em_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} - e(v_2 - v_1)$$

$$= \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - em_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

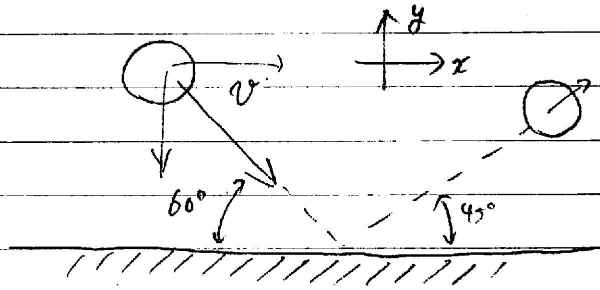
左向きなので負

$m_1 = 0.30\,kg$, $m_2 = 0.60\,kg$, $v_1 = 2.0\,m/s$, $v_2 = -3.0\,m/s$
$e = 0.80$ を代入して

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= -4.0\,m/s \\ v_2' &= 0\,m/s \end{aligned}\right\} \cdots (答)$$

No. . . (　　)

問題 14



衝突前の速度の
　x方向成分 $\frac{1}{2}v$
　y方向成分 $-\frac{\sqrt{3}}{2}v$

衝突後の速度の
　x方向成分 $\frac{1}{2}v$ （まさつがないので x方向成分は変化しない）
　y方向成分 $\frac{1}{2}v$ （45°だから）

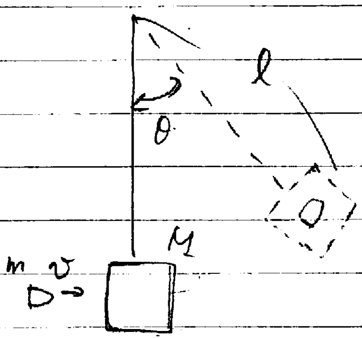
よって反発係数は
$$-\frac{\frac{1}{2}v}{-\frac{\sqrt{3}}{2}v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (= 0.58)$$ ……（答）

壁に垂直な方向の運動量保存則により、球が壁から受けた力積は
$$m\cdot\frac{1}{2}v - m\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}mv$$

よって壁が球から受けた力積は $\frac{1+\sqrt{3}}{2}mv$ （下向き）

問題15

一体となったときの木片と弾丸の速度をVとする。



運動量保存則により

$$mv = mV + MV$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{m}{m+M}v \quad \cdots\cdots ①$$

一体となってから振り上がるまでの力学エネルギー保存則より

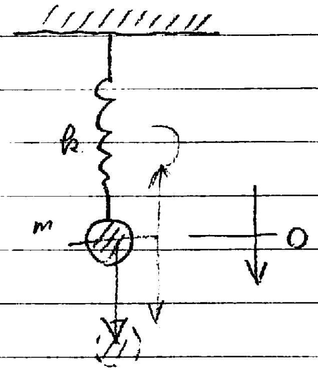
$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gl(1-\cos\theta) \quad \cdots ②$$

①,②より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 = gl(1-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)} \quad \cdots\cdots（答）$$

問題16



まず ばねの ばね定数を求める.
つり合った状態で

$$mg = kx$$

$$400g \times 9.81\,m/s^2 = k \times 5.0\,cm$$

$$\Leftrightarrow k = 78\ N/m$$

振動しているときの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$ （ばねの自然長を $x=0$ としている）

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + g = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

$x - \frac{mg}{k} = X$ とおくと, $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ になるから

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X$$

$$\Leftrightarrow X = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) + \frac{mg}{k}$$

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{400g}{78\ N/m}} = 0.45\,s$ ……(答)

問題16 (つづき)

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)+\frac{mg}{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right) \quad \cdots\cdots(*)$$

$t=0$ で $x = 7.0\ \mathrm{cm}$, $dx/dt = 0$

$\therefore$ $\sin\phi > 0$, $\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

このとき $A + \underbrace{\frac{mg}{k}}_{=5.0\ \mathrm{cm}} = 7.0\ \mathrm{cm} \Leftrightarrow A = 2.0\ \mathrm{cm}$

要するにつり合いから伸びた長さ

式(*)より、最高速度は

$$A\sqrt{\frac{k}{m}} = 2.0\ \mathrm{cm}\times\sqrt{\frac{78\ \mathrm{N/m}}{0.400\ \mathrm{kg}}}$$

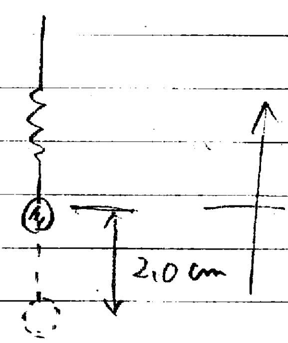
$$= 0.28\ \mathrm{m/s} \quad \cdots(答)$$

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ より、おもりが2倍になると周期は $\sqrt{2} = 1.4$ 倍 …(答)

(最高速度の別解)

自然長の位置を原点にとる。下向き正

力学エネルギー保存則より



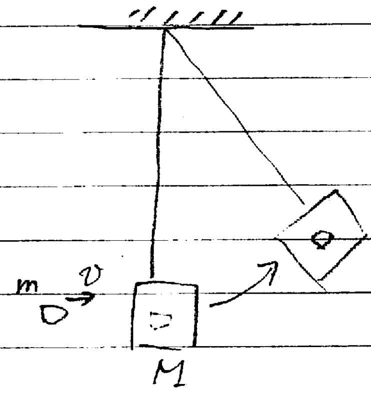
$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kl^2 - mgl$$

$$\Leftrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}x^2 + 2gx + \frac{k}{m}l^2 - 2gl$$

$$= -\frac{k}{m}\left(x-\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mg^2}{k} + \frac{k}{m}l^2 - 2gl$$

$x = \frac{mg}{k}$ のとき v^2 は最大で、$v = \sqrt{\frac{mg^2}{k}+\frac{k}{m}l^2-2gl} = 0.28\ \mathrm{m/s}$

問題17

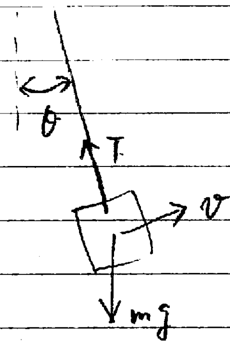


一体となったときの速度をVとする。
衝突前後の運動量保存則により

$$mv = mV + MV$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{m}{m+M} v \quad \cdots\cdots(答)$$

振り子の運動方程式



$$(m+M)\frac{dv}{dt} = -(m+M) g \sin\theta$$

$$v = l\omega = l\frac{d\theta}{dt},\quad \sin\theta \approx \theta \text{ より}$$

$$(m+M) l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(m+M) g \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\Leftrightarrow \theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \phi\right)$$

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ……(答)

$$\frac{d\theta}{dt} = A\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \phi\right)$$

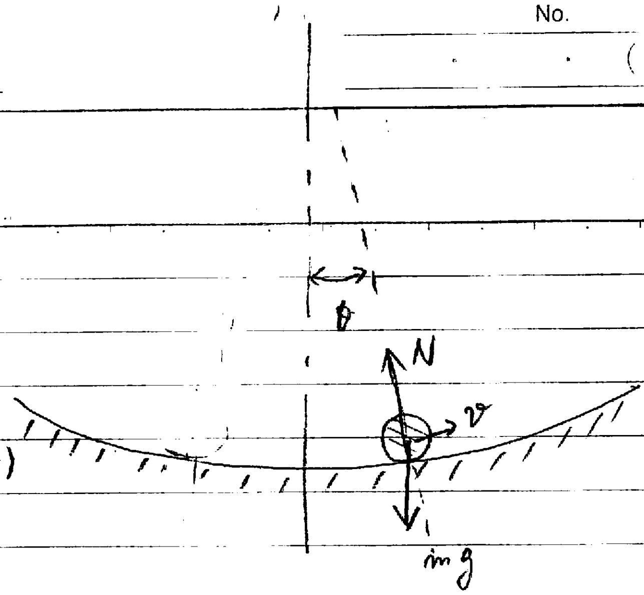
$t=0$のとき $l\frac{d\theta}{dt} = V = \frac{m}{m+M} v$, $\theta = 0$

よって $\sin\phi = 0$, $\cos\phi > 0 \Rightarrow \phi = 0$

また $lA\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{m}{m+M} v \Leftrightarrow A = \frac{mv}{(m+M)\sqrt{gl}}$

よって $\theta = \frac{mv}{(m+M)\sqrt{gl}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$ ……(答)

問題18



運動方程式　(円周方向)

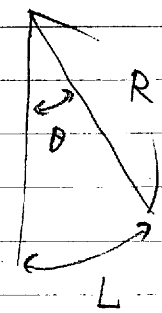
$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \quad \text{……(答)}$$

$v = R\dfrac{d\theta}{dt}$ なので

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta$$

$$\Leftrightarrow \theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \phi\right)$$



$t=0$ のとき $\theta = \dfrac{L}{R}$, $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ なので

$$\frac{d\theta}{dt} = A\sqrt{\frac{g}{R}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \phi\right) \text{ より}$$

$$\sin\phi > 0, \ \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

これより $A\sin\phi = A = \dfrac{L}{R}$

$$\therefore \theta = \frac{L}{R}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{L}{R}\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t \quad \text{……(答)}$$

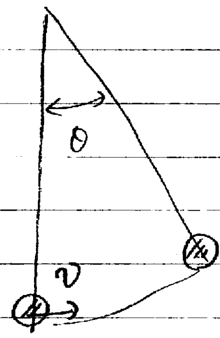
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{R}\sqrt{\frac{g}{R}}\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t$$

最高角速度　$\dfrac{L}{R}\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

最高速度　$R\dfrac{L}{R}\sqrt{\dfrac{g}{R}} = L\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ ……(答)

問題18　(別解)

最高速度を力学エネルギ保存から導く.



$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{12}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

より、θが微小なときは

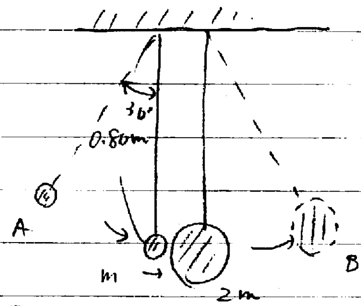
$$1-\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2gR\cdot\frac{1}{2}\theta^2}$$

$$= \sqrt{gR}\,\theta$$

$$= \frac{L}{R}\sqrt{gR} = L\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \cdots(答)$$

問題 19



衝突前のAの速度を v とする
力学エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2\times 9.81\,\mathrm{m/s^2}\times 0.80\,\mathrm{m}\times(1-\cos 30^\circ)}$$

$$= 1.5\,\mathrm{m/s} \quad \cdots(答)$$

衝突後の A、Bの速度を v_A、v_B とする.
運動量保存則により

$$mv = mv_A + 2mv_B \quad \cdots ①$$

反発の法則により

$$e = -\frac{v_B - v_A}{-v} \Leftrightarrow v_B - v_A = ev$$
$$\Leftrightarrow v_B = v_A + ev \quad \cdots ②$$

①,②より

$$mv = mv_A + 2m(v_A + ev)$$
$$= 3mv_A + 2emv$$

$$\left.\begin{aligned} \Leftrightarrow v_A &= \frac{1-2e}{3}v = 0.44\,\mathrm{m/s} \\ v_B &= \frac{1-2e}{3}v + ev = \frac{1+e}{3}v = 0.94\,\mathrm{m/s} \end{aligned}\right\} \cdots(答)$$

衝突後にBが振り上がる角度を θ とすると、力学エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_B^2 = 2mgl(1-\cos\theta)$$

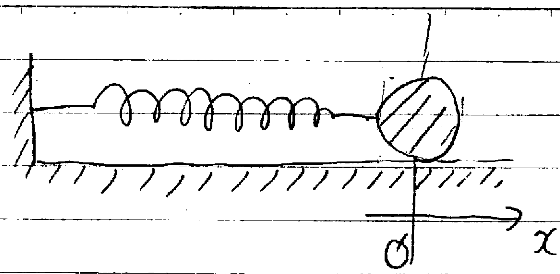
$$\Leftrightarrow \cos\theta = 1 - \frac{v_B^2}{2gl}$$

$$= 0.94 \qquad \therefore \theta = 19^\circ \quad \cdots(答)$$

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.8\,\mathrm{s} \quad \cdots(答)$

No. ( )

問題20



小球の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \cdots\cdots(答)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)$$

周期 $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ……(答)

$t=0$ のとき $x=0$, $\frac{dx}{dt}=-V$ より

$$\begin{cases} A\sin\phi = 0 & \cdots ① \\ A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\phi = -V & \cdots ② \end{cases}$$

$A\neq 0$, $\sin\phi = 0$ より $\phi=0$

②に代入して $A\sqrt{\frac{k}{m}} = -V \Leftrightarrow A = -V\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\therefore x = -V\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

振幅 $V\sqrt{\frac{m}{k}}$ ……(答)

振幅の別解 力学エネルギー保存により

$$\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}mV^2 = 0$$

$\frac{1}{2}mV^2$: $t=0$ での力学エネルギー

$\frac{1}{2}kA^2$: ばねが最も縮んだときの力学エネルギー

$$\Leftrightarrow \quad A = V\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots\cdots(答)$$