工業数学 A　金野担当

2013 年 4 月 30 日

線型方程式の工学的応用例

線型方程式の解法は，工学の非常に幅広い分野で用いられる．金野は流体工学が専門なので，ここでは例として流れの計算に用いる線型方程式について説明する．

流れの運動方程式は，概要を書くと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\text{流体の質量} \times \text{流れの時間変化} \\
&\qquad = \text{慣性力} + \text{圧力差に起因する力} + \text{粘性力} + \text{重力などの体積力}
\end{aligned}
$$

この右辺のうちで慣性力や粘性力は，流れが変化すれば少しずつ変わってくる量なので，流れの変化自体が小さければ慣性力や粘性力の変化はごくわずかだ．また，重力などの体積力はたいていは一定である．

問題は圧力で，これは変化の伝わり方が流れに比べてずっと速いのが特徴だ．圧力は音速で伝わる．たとえば空気中だと，風速は 30 m/s ($=$ 108 km/h) も出れば速い方だが，圧力は 330 m/s 以上の速度で伝わる．このほかに質量保存則をみたすためなどの理由もあって，比較的遅い流れの計算では圧力を精度よく求めることが重要になる．

ここでは代表的な流れの計算方法のひとつである部分段階法を紹介しよう．この解法では，流れを次のように 3 段階に分離してして解く．

$$
\text{流れの時間変化 (仮)} = (\text{慣性力} + \text{粘性力} + \text{重力などの体積力}) \div \text{流体の質量} \tag{4}
$$

$$
\text{(ここで圧力の計算を行う)} \tag{5}
$$

$$
\text{流れの時間変化} = \text{流れの時間変化 (仮)} + \text{圧力差に起因する力} \div \text{流体の質量} \tag{6}
$$

式 (4) は要するに運動方程式だが，圧力の影響が抜けている．それを (5) で計算して，あとから式 (6) で付け加える，という手順である．最初から圧力を計算しないのは，仮の流れ場が求められないと圧力が計算できないためである．

(5) の圧力の計算のところは，以下のような式になる．(この例は 2 次元．p が圧力)

$$
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \text{(質量保存則の誤差分)} \tag{7}
$$

左辺に圧力の 2 階偏微分が出てくる．この部分を計算するために，図 1 のように空間を**離散化**する．つまり空間のすべての場所での圧力は計算できないので，圧力の値を求める

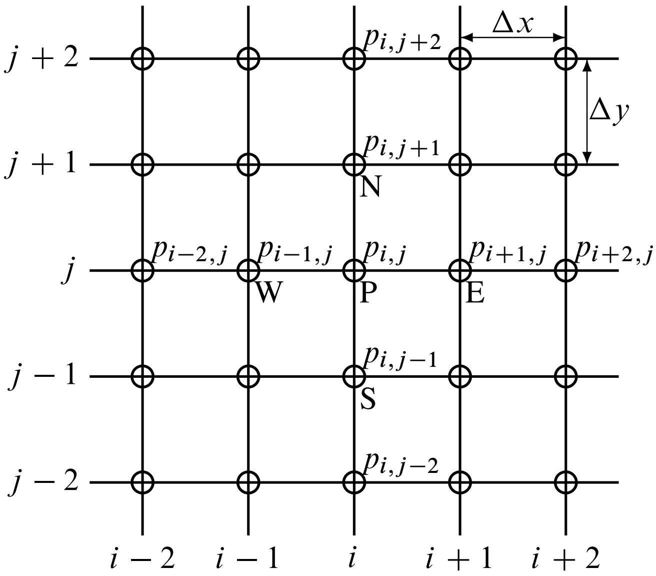

図 1　圧力を計算するための「格子」

場所を格子上の点（図中に丸で示した場所）だけに制限する．そして，

$$
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{p_{i+1,j}-p_{i,j}}{\Delta x} - \frac{p_{i,j}-p_{i-1,j}}{\Delta x}\right)
$$
$$
\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{\Delta y} - \frac{p_{i,j}-p_{i,j-1}}{\Delta y}\right)
$$

のように偏導関数を**差分近似**する．すると式 (7) は次のような方程式になる．

$$
A_S\,p_{i,j-1} + A_W\,p_{i-1,j} + A_P\,p_{i,j} + A_E\,p_{i+1,j} + A_N\,p_{i,j+1} = (\text{質量保存則の誤差分}) \tag{8}
$$

$$
A_W = A_E = \frac{1}{\Delta x^2},\quad A_S = A_N = \frac{1}{\Delta y^2},\quad A_P = -(A_S + A_W + A_E + A_N) \tag{9}
$$

この方程式が格子点の数だけ立つ線型方程式 (連立 1 次方程式) ができる．この方程式を解くことで圧力が求まり，流れの状態が分かる．

この計算では計算時間のほとんどを (8) の線型方程式を解く部分に使う．だから線型方程式の解法の効率はとても重要で，遅いと計算が使い物にならない．そのため現在でも線型方程式の解法の研究はさかんに行われている．