ニュートン・フラクタル(Newton Fractal)とは

方程式の複素数根をニュートン法で求める

非線型方程式の数値解法としてニュートン法を学んだ．授業では実数根しか扱わないが，ニュートン法で複素数根を求めることができる．方程式 $f(z) = 0$ をニュートン法で解くには，

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

のように計算すればよい．複素数だから複素数らしくzと書いているが，実際には残差基準 $|f(z_n)| < r$ で収束を判定することを含め，実数で計算するときと同様である．

ニュートン・フラクタル(Newton Fractal)

たとえば 3 次方程式には根が 3 つあり，ニュートン法の計算を異なる初期値からはじめると，異なる根に収束する．

複素平面上の点(つまり複素数)を取り，その点からニュートン法の計算をはじめて，どの根に収束したかによって複素平面を色分けする．たとえば方程式 $z^3 - 3z^2 + z - 1 = 0$ をニュートン法で解き，収束する根によって複素平面上の点を赤，青，緑に色分けし，収束しなかった点を黒く塗ると，図 1 のような特徴的な模様が作られる．

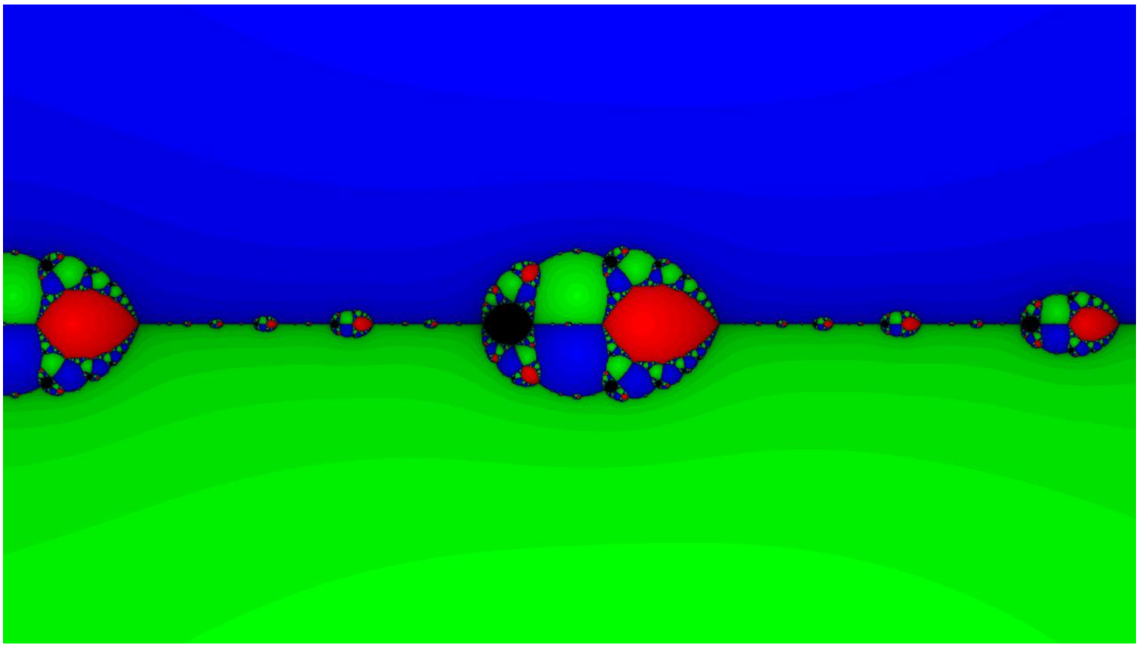

図 1: 方程式 $z^3 - 3z^2 + z - 1 = 0$ のニュートン・フラクタル

この図は収束が速かった場合に色を明るく，遅かった場合に色を濃く表示しているので，濃淡が見えている．

この図の一部分を拡大すると，元の図と相似，あるいはよく似た図形が観察される（自己相似性を持つ，と表現する）．このような特徴を持つ図形をフラクタル（fractal）と呼ぶ．図 1 はニュートン法によって作り出されたフラクタル図形なので，ニュートン・フラクタル（Newton fractal）と呼ばれている．

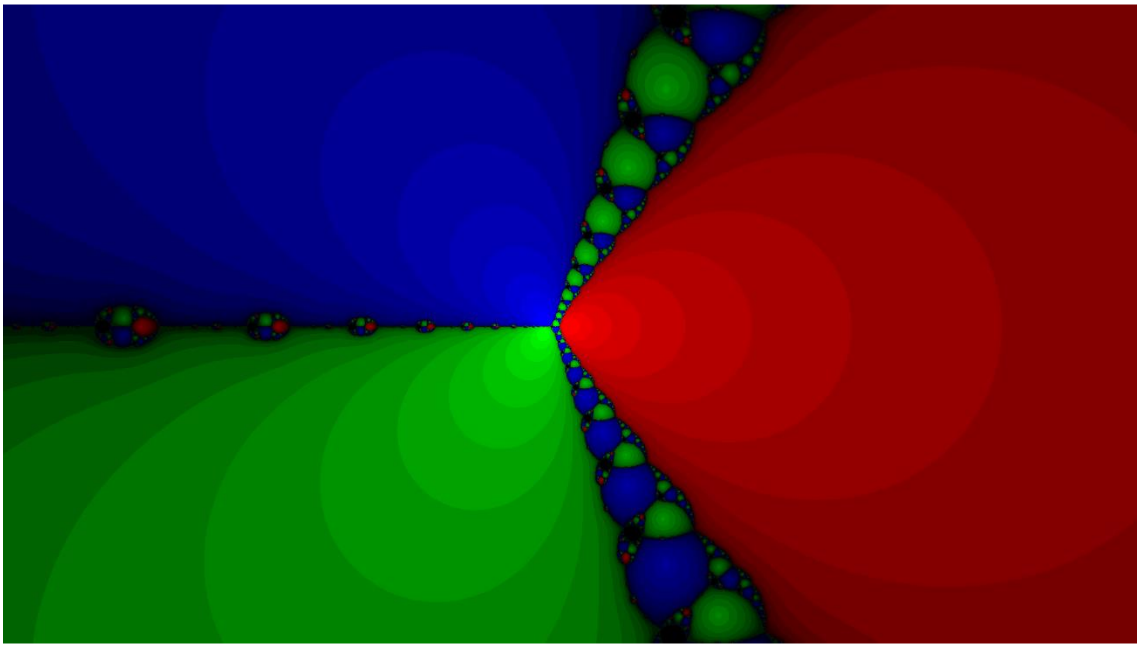

図 2： 方程式 $z^3 - 3z^2 + z - 1 = 0$ のニュートン・フラクタル（図 1 をズームアウトしたもの）

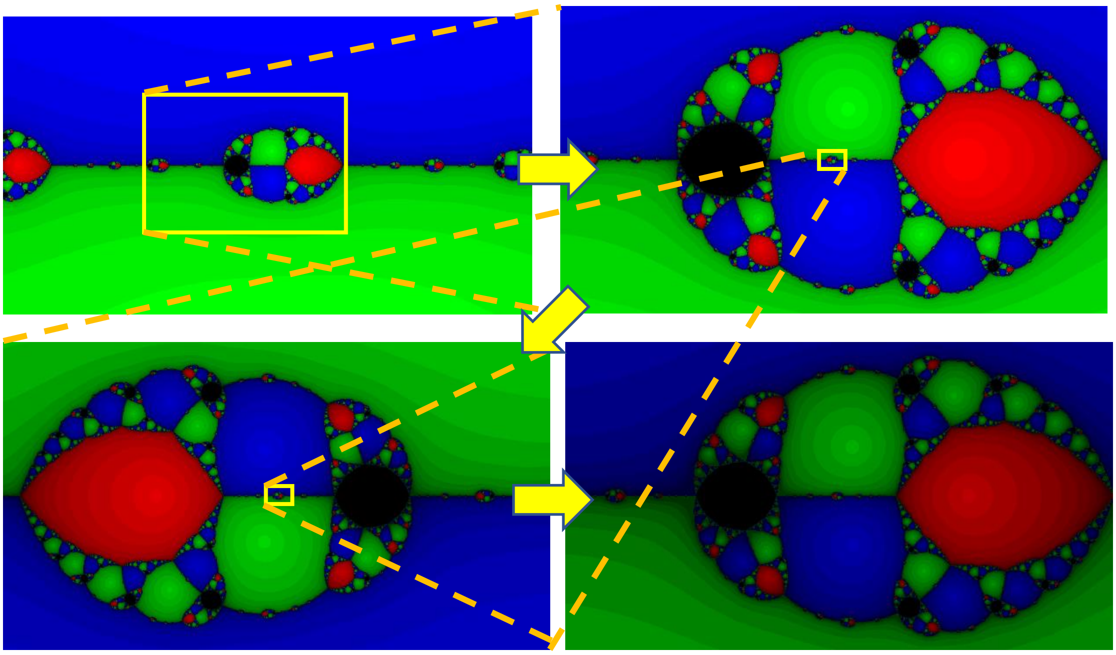

図 3： ニュートン・フラクタルの自己相似性．だんだん暗くなるのは，収束が遅くなっていくから

この図形から，初期値のわずかな違いによって収束する根が異なるが，しかしある点の十分近くには同じ根に収束する点が固まって存在していることが見て取れる．
このニュートン・フラクタルは方程式 $z^3-3z^2+z-1=0$ が持っている(隠し持っている？)構造を表しているとも言える．この方程式は美しい，と言えるだろうか？

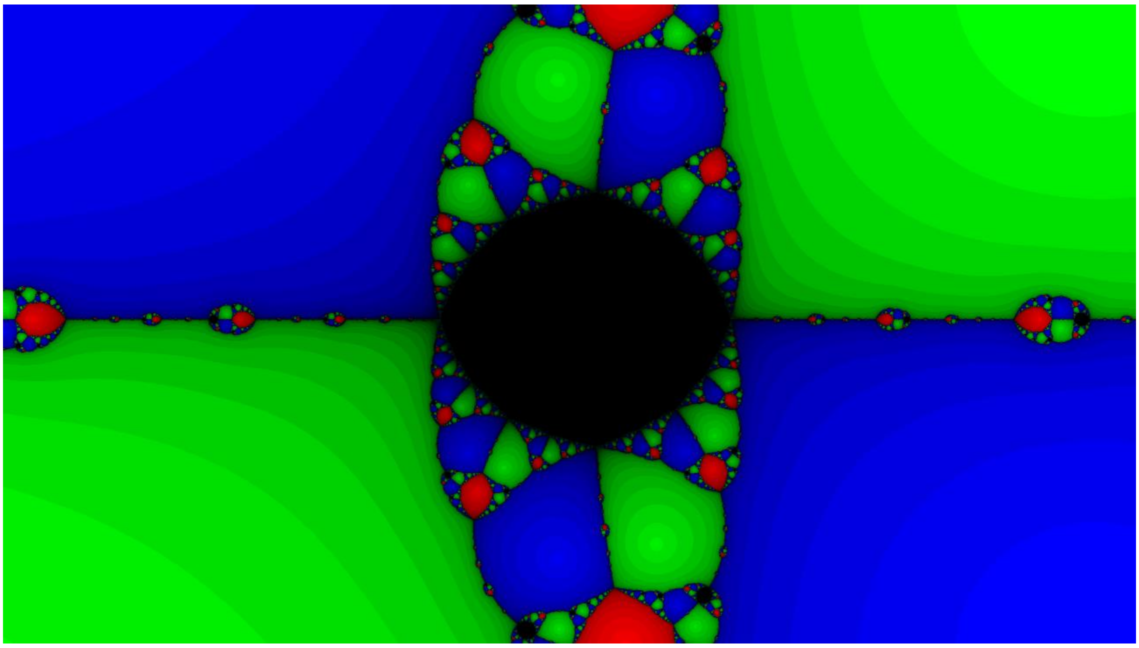

図 4: 方程式 $z^3-3z^2+z-1=0$ のニュートン・フラクタル(図 3 とは別の場所を拡大)

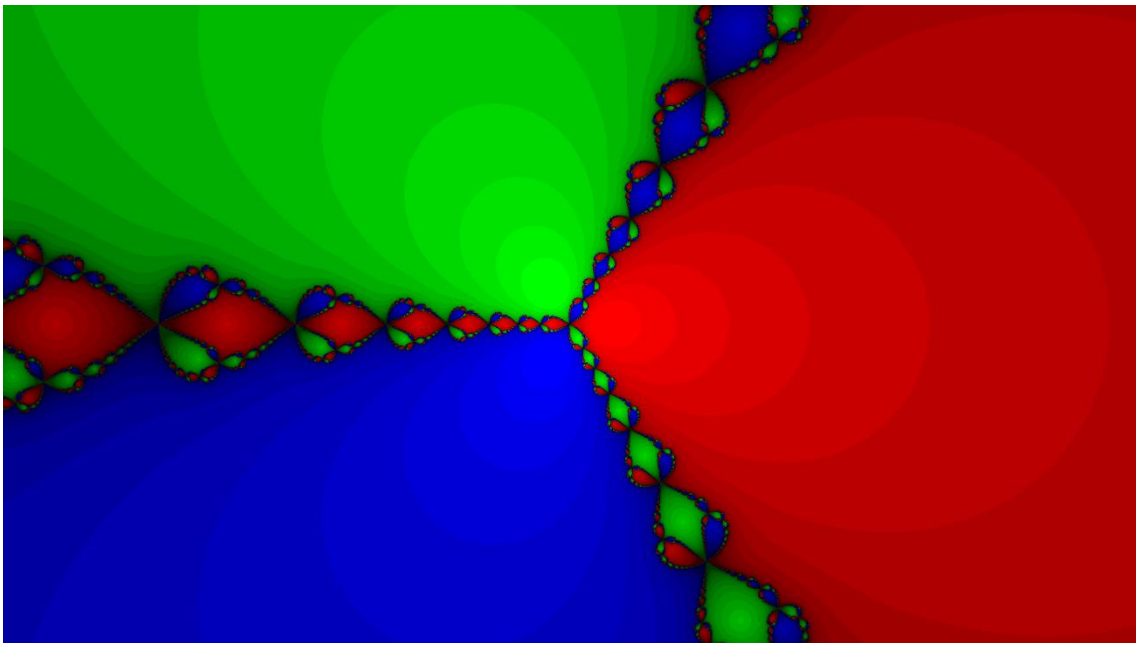

図 5: 方程式 $z^3-1=0$ のニュートン・フラクタル．「newton fractal」で画像検索するとよく出てくる図

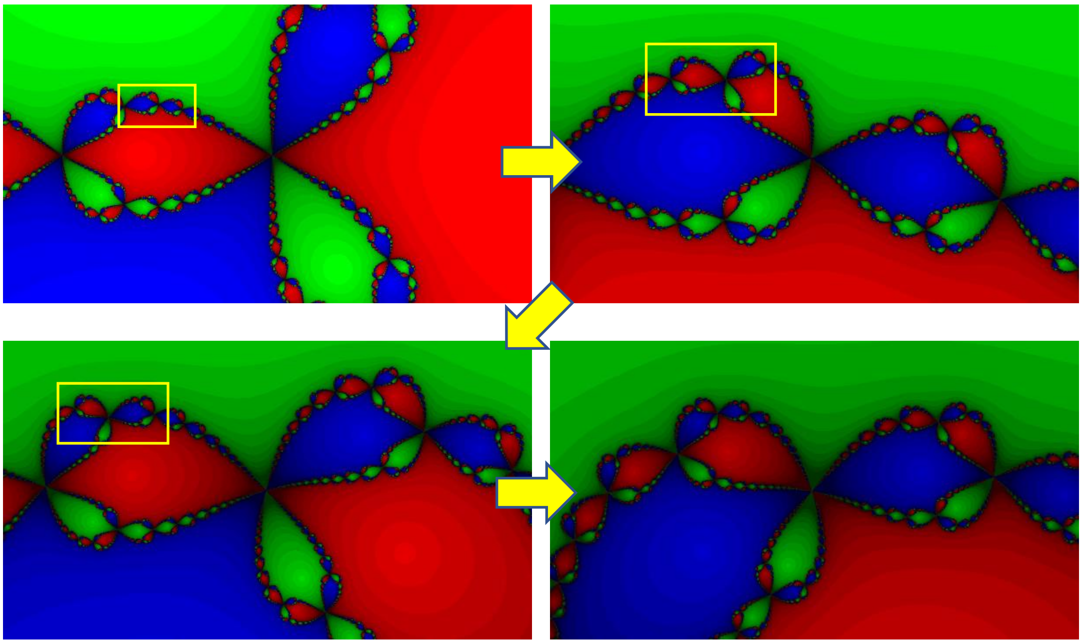

図 6： 図 5 の中心付近を連続して拡大したもの．自己相似性を持つ．

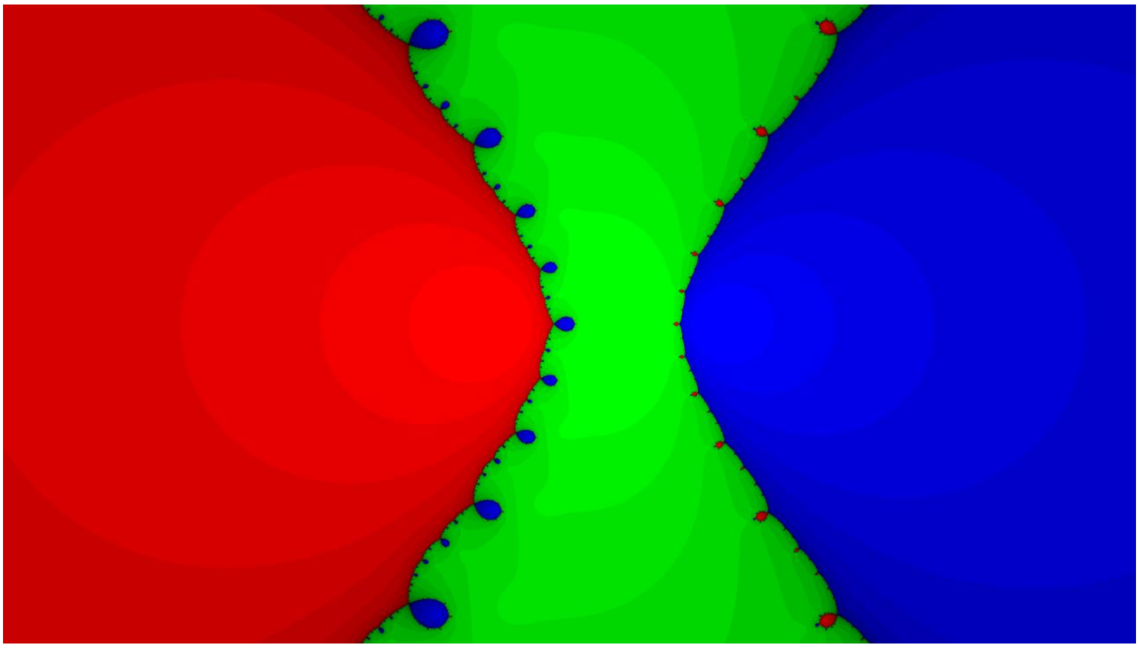

図 7： 方程式 $z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$ のニュートン・フラクタル．この方程式は実数根を 3 つ持つ．実数根 1 つと複素数根 2 つを持つ図 1～4 とは異なる様相の図ができるが，自己相似性は備えている．

4 次以上の方程式でも，同じ方法でニュートン・フラクタルを作ることができる．

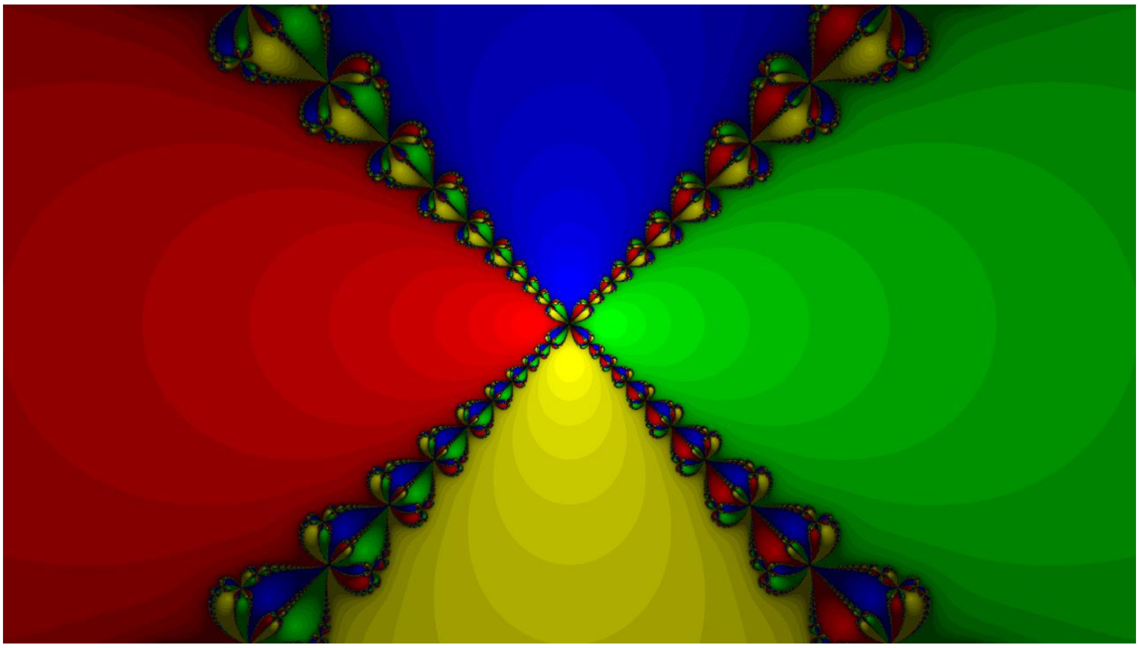

図 8: 方程式 $z^4 - 1 = 0$ のニュートン・フラクタル. これも「newton fractal」で画像検索するとよく出てくる.

YouTube に方程式 $z^3 - 3z^2 + z - 1 = 0$ のニュートン・フラクタルを徐々に拡大していく動画を掲載している.

https://youtu.be/f3pxyEHSrpY

ChangeLog

2018-06-30　初版