流体計測特論（乱流 2）

機械工学科 飯田 明由

要　約

前回までに，非定常データの数学的・統計的な取り扱いについて述べてきた．ここでは，より乱流の統計データ処理に関するより具体的な手法を学ぶため，一様等方生乱流の計測を元に乱流の統計理論について解説する．乱流の統計理論ではスペクトル解析と渦スケールの関係を扱うことが多い．スペクトル解析から得られる重要な知見として，乱流のカスケード構造，渦スケールの自己相似性，熱への散逸機構などが挙げられる．本講義では乱流理論について実際の実験データ，実験手順を示しながら解説する．

1. 平均値の概念

Euler表記による速度場は

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

と表すことができる. 乱流の場合, 速度は位置と時間の関するとして与えらる. 関数u(x, t)が得られれば, 流線が得られるので, 流れの様子が直感的に得られると期待される. しかし, 乱流の場合, 各点のデータは不規則に変化するので, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$から流線を描き, 現象を表現しようとする方法では, 多数の観測データが必要になり, 果てしない数値データ表が必要になる.

仮にサンプリング周波数10kHzで各計測点において10秒づつデータを取得するとする. 1計測点につき10^4個のデータが必要になる. 測定点が1000点あれば, 10^7個のデータ列となる. 1データを4バイトで保存するとデータ量は40Gバイトとなる. 速度の3成分を測定すると100Gバイト以上の数列となるが, ここから物理的な意味を導くのは非常に難しい.

一般には観測データ$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$を統計的に処理することにより, 物理的な問題として考える.
具体例を示そう.

有限な体積Vを持つボンベに圧力p_o, 温度T_oの空気を満たす. バルブを開くと, ボンベ内の圧力が周囲の圧力に等しくなるまで, 管Rから噴流が噴出す. このような実験を何度も繰り返すことを想定する.

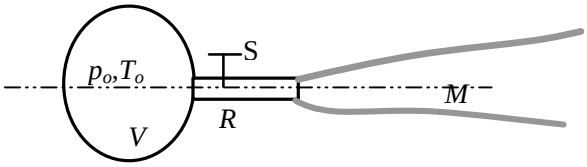


図1 乱流の実験例

1回1回の実験の結果をrealizationと呼ぶとする. バルブを開いてからt秒後に, 位置Mにおける速度の瞬時値を測定する. この測定によって$\boldsymbol{x},t$の組のおのおのに速度$\boldsymbol{u}$に関する実験値が得られる. 実験毎に得られる$\boldsymbol{u}$ (realization)は異なる.

得られたu (u_1,u_2,u_3)の性質を記述するには, 位置$x(x_1,x_2,x_3)$, 時刻tにおける確率密度

$$f(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, t)du_1du_2du_3$$

によって記述される.

確率密度を用いて, 速度成分に関する数学的な期待値をあらわせば,

$$\overline{u_1}(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint u_1(x_1, x_2, x_3, t) f(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, t)du_1du_2du_3$$

と記述できる. この期待値の定義は, すべてのrealization全体についての算術平均を示している.
平均値に対応する基本流と速度成分の不規則運動との組み合わせで流れ場を記述すると,

$$u_i = \overline{u_i} + u_i'$$

である. 速度変動に関する確率密度をgとすると,

$$\overline{u'_i} = \iiint u'_i(x_1, x_2, x_3, t) g(\mathbf{u}', \mathbf{x}_1, t) d\mathbf{u}' = 0$$

である. ここで速度変動u'の期待値は0である.
乱流を記述する場合, このu'を扱うことが多い. 以下, 特に断らない限り速度の変動成分を扱う.

2. 乱流とレイノルズ数

乱流とは,

(1)不規則運動であり, 速度の時空間的な変化が複雑であり, 個々の測定結果にはまったく再現性がなく, 偶然の値である.

(2)渦運動

(3)3次元流れ

(4)非定常流

→ 乱流は確率過程(Stochastic Process)である.

乱流は非保存系である. 力学的エネルギーは最終的には粘性によって熱に変換される. 粘性が大きい場合(レイノルズ数が小さい場合), 流体の運動はすぐさま熱に変換されるため, 乱流は発生しない.

レイノルズ数は慣性力と粘性力の比を表す無次元量であるが, NS方程式は

慣性力＝粘性力＋圧力

であることから, レイノルズ数が大きい場合, NS方程式中の粘性力を無視することができる. ここで, 慣性力F=mα, せん断応力τ=?u/?yよりレイノルズ数は

$$F = m\alpha = \rho L^3 \frac{U}{L/U} = \rho L^2 U^2 \qquad \text{……慣性力}$$

$$\tau A = \mu \frac{\partial u}{\partial y} A = \mu \frac{U}{L} L^2 = \mu L U \qquad \text{……せん断応力×面積}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L^2 U^2}{\mu L U} = \frac{UL}{\mu / \rho} = \frac{UL}{\nu}$$

レイノルズ数は代表流速，代表寸法と動粘性係数νの比で表すことができる．乱流の場合，代表速度や代表寸法はどのようにすれば良いのであるか？

代表速度

乱流の場合，代表速度は主流の速度ではなく，どれだけ流れが変動しているかで表されるので，速度変動の実効値（rms）が用いられる．

速度変動の2乗平均値は乱流のもつエネルギーの大きさを表す尺度である．一般に実効値を平均速度で無次元化し，平均値に対する割合で表すことが多い．論文等では乱流強度，乱れ強さ（**Turbulent intensity**）と表現される．

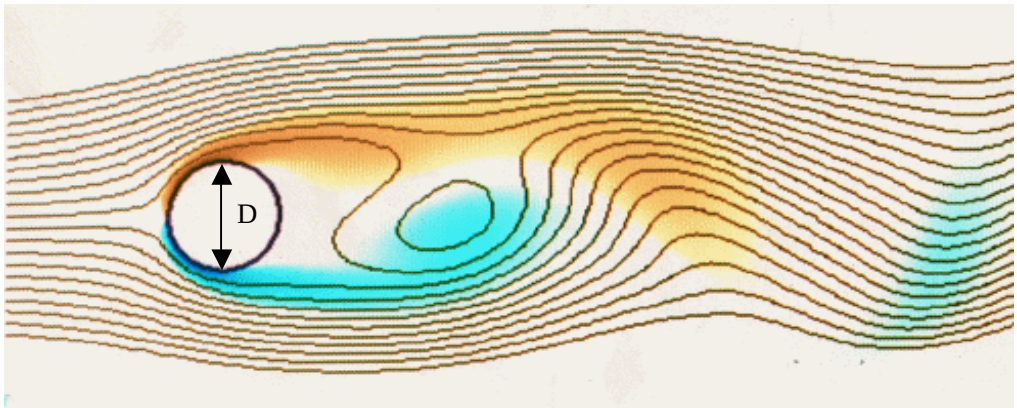
乱流強度を測定するには，熱線流速計等で速度変動の時系列データを取得し，平均速度を算出する．次に時系列データから平均値を差し引き，その値を2乗したのち，2乗値の平均値（及びその平方根）を求める．

代表寸法

まず，一般的なレイノルズ数を表す場合について検討しよう．流れが層流でも乱流でももレイノルズ数を表すには，何らかの速度や寸法を代表速度としなければならない．

円管の場合，直径，境界層の場合は板の長さとすることが多いが，これはなぜだろうか？

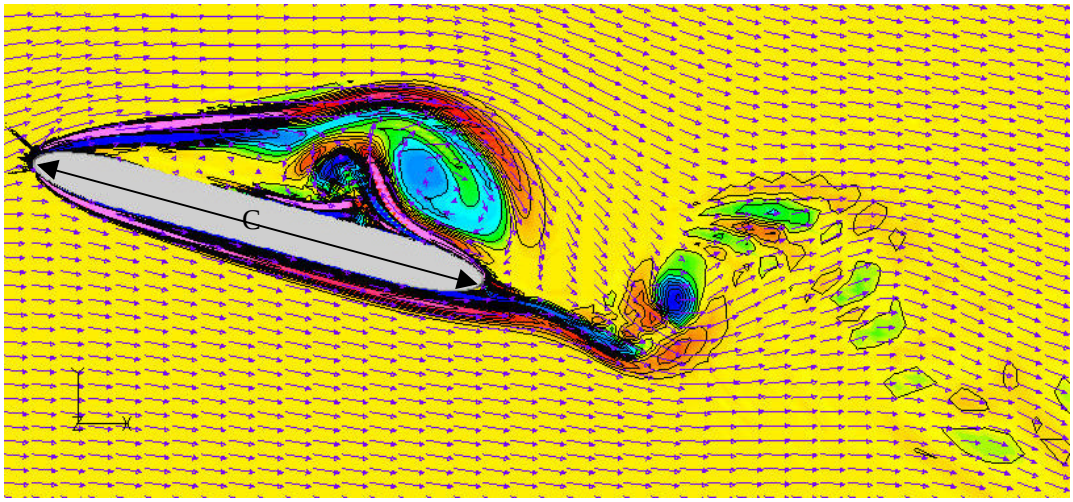
（1） 円柱の場合



代表寸法　：円柱直径D

図 2(a) 円柱周りの流れ

(2) 翼の場合



代表寸法　翼弦長 C

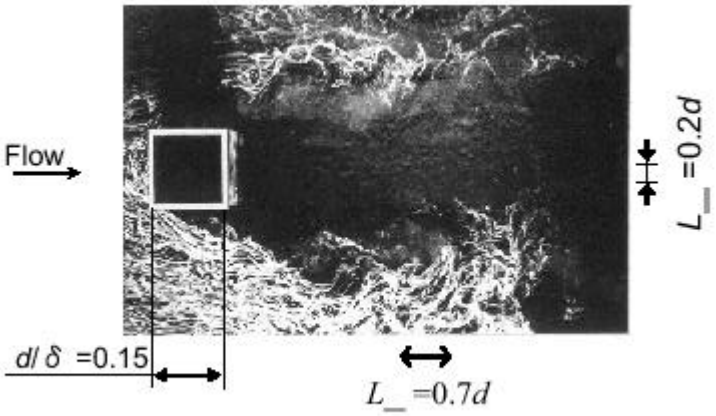
図 2(b) 翼周りの流れ

代表寸法は単純に幾何学的な寸法を基準とするのではなく, 流れの性質を基準に取っている. もちろん, どの寸法を代表長さにとっても良いが, 寸法に意味がなければ物理的な解釈をすることは難しい. また, 各分野では幾何学的な代表寸法の取り方に対するスタンダードがあるので, まずはじめは文献調査を行い, 代表寸法になにをとるか確認するようにする. その後に, その長さの取り方が適切か, あるいはさらに良い方法を検討する. 論文等に記載する場合は, 標準の値と自分の決めた代表寸法の取り方を明記する.

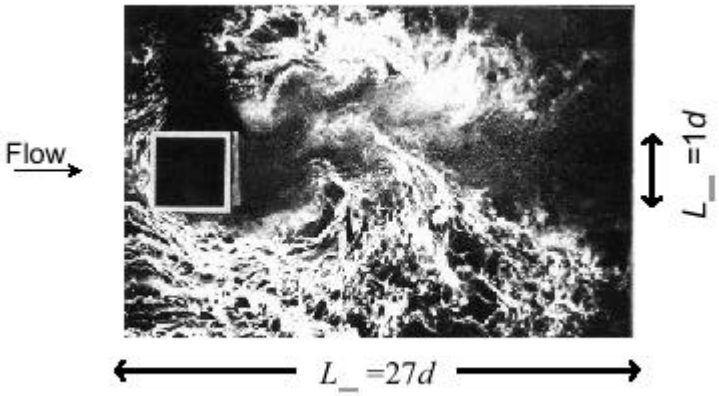
さて, 乱流の性質を議論する場合は, 代表寸法をどのようにとれば良いか？

図3は角柱まわりの流れをスモークワイヤで可視化した結果である. 平均速度はどちらも同じなので, 幾何学的レイノルズ数 (R_M=15.6×10^3) は同一である. しかし, 可視化の結果は明らかにことなる. (a)では物体の後方に煙が流れ込まないが, (b)では煙が流れ込む. 一般に渦のスケールと物体のスケールが同程度の場合, 渦と物体の干渉の度合いが大きくなる. 物体に比べて, 渦が小さければ, 渦は物体の作る平均的な流れ場に沿って運動する(a). 一方, 物体が渦に比べて小さい場合は, 物体の影響は小さい. したがって, (b)のように物体と渦のスケールが同程度の場合は, 強い干渉が見られる. 高層ビルの周囲に生じるビル風という現象はこのようなメカニズムによって発生する.

風洞実験でビル風等を再現しようとする場合, 幾何学的レイノルズ数がめかが同じ流れ場であるが, 渦スケールと乱れの強さが異なる流れである. 渦スケールが異なると, 流れ場が大きく異なることがわかる.



(a) 乱流格子+速度成層装置



(b) せん断乱流発生装置

図3 角柱（ビル・モデル）周りの流れ
乱流レイノルズ数の違いによる流れ場の変化

乱流の渦スケールの定義方法

<u>積分特性距離</u>：乱流の渦の大きさを表す方法として，相関関数の積分値を用いる方法がある．空間的に離れた2点の速度の相関係数を$R_{ij}(r) = u'_i(x)u'_j(x+r)$とする．一様な場では$R_{ij}$は位置xに依存しないから，$R_{ij}(r) = R_{ij}(-r)$である．空間の距離rが十分大きいとき，離れた2点の速度u_iとu_jは統計的に独立であるから

$$\lim_{|r|\to\infty} R_{ij}(r) = 0$$

である．逆に相関関数が0でないということは，速度u_iとu_jに何らかの関係があるということである．もちろんr=0のとき，

$$R_{ij}(0) = \left[u'^2_i(x)u'^2_j(x)\right]^{1/2}$$

である．rが0ということは自分自身ということであり，このとき相関は最大となる．
相関関数を$R_{ij}(0)$で規格化した，相関係数

$$\hat{R}_{ij}(r) = \frac{\overline{u'_i(x)u'_j(x)}}{\left[\overline{u'^2_i(x)u'^2_j(x)}\right]^{1/2}}$$

で表す．相関係数はr＝0のとき1となり，十分遠方では0になる．相関係数は距離 r が離れるにしたがって，速度u_iとu_jの関係が薄れていく割合を示している．図4に相関係数の模式図を示す．この図はrだけ離れた位置で，速度がどの程度影響を及ぼすかを示している．もちろん，乱流は非定常の現象であるから，rが大きいときでも速度間に関係がある場合もあるし，rが小さくても無関係である場合も考えられる．しかし，相関関数は平均的に関係の強さを表していると考えられるので，相関関数とR軸及びr軸に囲まれた範囲は，2点の速度が何らかの関係を持っている領域である．

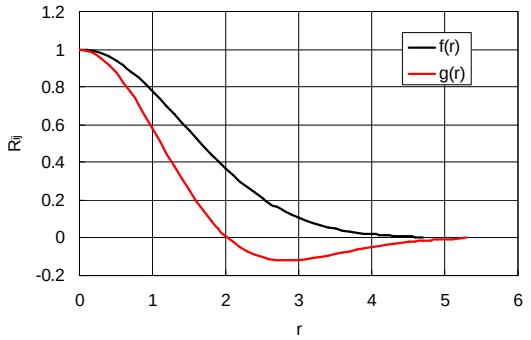


図4　相関係数の模式図

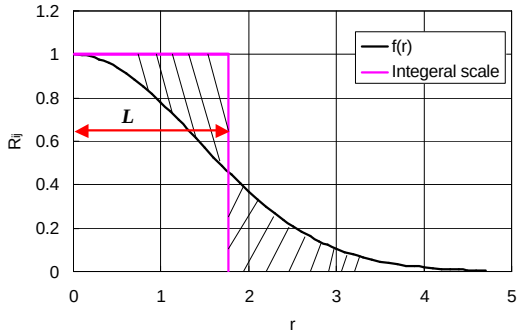


図5　相関係数と積分特性距離

一方，相関係数が 1となるような十分大きな相関を持つ場合，流体の運動は一体となって動いているはずである．相関係数を積分して得られた“流れが何らかの関係を持つであろう領域”の面積は，相関係数が 1，すなわち流体が一体となって動く場合の面積に置き換えた場合，図5における長さr＝Lの領域に相当する．Lは積分特性距離(integral scale)と呼ばれ，瞬間的に一体として動く流体塊の程度を示す．乱流理論では積分特性距離が重要な役割を果たす．

$$L_{ij} = \frac{1}{2\overline{u'_i(x)u'_j(x)}}\int_{-\infty}^{\infty} R(r)dr$$

乱流の特性距離としてテイラーが導入した微分特性距離（テイラーのマイクロスケールλ）も広く使われている．テイラーのマイクロスケールは

$$\frac{1}{\lambda^2_{ij}} = \frac{1}{\overline{u'^2_i(x)}}\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}\right)^2}$$

で表される．テイラーのマイクロスケールは積分特性距離より常に小さい．積分特性距離は乱流塊が一体となって動く範囲を表し，エネルギーを保有した渦の大きさを表している．一方，テイラーのマイクロスケールは積分特性距離ほど明確な意味を持っていないが，乱れ強度の減衰，すなわち散逸と強い結びつきを持っていること，測定が比較的容易なので，乱流の研究では広く利用されている．

乱流レイノルズ数

一般に乱流の基礎研究ではレイノルズ数はテイラーのマイクロスケールと乱れのRMS値を用いて表される. すなわち

$$\mathrm{Re}_\lambda = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}\,\lambda}{\nu}$$

を用いることが多い. 先に示した可視化写真の幾何学的レイノルズ数に対して, Re_λ＝70と800である. 大気乱流は一般に1000程度であり, 極めて大きな乱流レイノルズ数となる.
積分特性距離に基づくレイノルズ数は

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}\,L}{\nu}$$

で表される.

ここで, 実際の計測という立場から考えると, 空間的に離れた 2 点の相関を測定するよりも, 空間に固定された一点の時系列データを取得する場合のほうが容易な場合が多い. たとえば, センサを挿入して流れ方向に離れた 2 点の速度を計測する場合, 下流のセンサには, 上流に置かれたセンサの影響が現れてしまう.

一般に熱線流速計やレーザー流速計では時間分解能が高いため, 時系列データの取得は用意であり, PIV などの空間計測が可能な計測手法で得られる空間分解能よりも, 時間分解能を空間分解能に置き換えた場合の分解能のほうが精度が高い.

したがって, 時系列データを空間データに変換する方法があると, 実験を行う上で都合がよい.
このような時系列データを空間データに置き換える方法にテイラーの凍結仮説を利用した方法がある.

乱れが主流速度に比べて小さい場合, 空間微分は時間微分を用いて以下のように記述できる.

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{U_c}\frac{\partial}{\partial t}$$

ここで U_c は渦の平均移動速度を表し, convection velocity と呼ばれる.
風洞実験では一般に主流流速が用いられ, 噴流や境界層の場合, 主流速度の 0.8 倍の速度などが用いられる. この関係を用いると空間に関する微分や物理量の変化を時間微分に置き換えられるので, 測定が用意になる. ただし, この仮定が成り立つには, 渦の移動流速が乱れ強度に比べて十分大きい場合に限られる. このような仮定の元では, 乱れの空間的な構造が, “凍結”してセンサを通過するため, センサによって時系列データとして記録された実験データから空間的な性質を予測することが可能になる. この仮説はテイラー (1938) によって提案されたことからテイラーの凍結仮説と呼ばれている.

3. 一様等方性乱流

無限に広がった一様な乱れ場を考える. 一様とはすべての統計量や分布が位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関係しない場合を言う. したがって, 一様乱流では速度の平均値は 0 である. 一様乱流では平均値に関する時間微分及び位置に関する微分はすべて 0 になる. 実際には平均速度 U で移動する座標系を導入すれば平均速度 U で移動する流れについても運動方程式は等価であり, 一般性を失うことなく一様乱流を考えることができる.)

ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j{}^2}$$

に速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ をかけて, 各項の平均を取る. ここで $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$ 及び $\frac{\partial\overline{(\ldots)}}{\partial x_i}=0$ であるから,

$$\overline{u_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial u_iu_iu_j}{\partial x_j}}-\frac{1}{2}\overline{u_iu_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}=0$$

$$\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}}=\overline{\frac{\partial u_ip}{\partial x_j}}-\overline{p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}=0$$

$$\overline{u_i\nabla u_i}=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial^2 u_iu_i}{\partial x_j\partial x_j}}-\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=-\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

したがって,

$$\frac{1}{2}\frac{du_iu_i}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\overline{\mathbf{u}^2}}{2}=-\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=-\varepsilon$$

が得られる. 乱流エネルギー $u^2/2$ の時間的な変化, すなわちエネルギー散逸はと速度場の空間微分の関係が得られる.

粘性渦運動では散逸は常に正の値を持ち, 0 にならないから, 乱れのエネルギーは時間とともに減衰する.

さらに数学的な取り扱いを容易にするため, 流れは一様かつ等方であると仮定する. 等方とは, 座標系を任意に回転しても, また, 任意の平面について鏡像しても, 速度成分から求めた任意の平均値が不変に保たれるということである. (G.I.Taylor の等方性乱流の概念)

この条件を与えることにより, 速度の 2 乗平均値がすべての方向で等しくなる. したがって,

$$\overline{u_1}^2=\overline{u_2}^2=\overline{u_3}^2=\frac{\overline{u^3}}{3}$$

となる.

実際には一様な乱流を作ることは難しいので, 一般には平均速度 U の均一な流れを網目状の格

子（図 6）を通過させることで準一様な乱流をつくり，その性質を調べる．このような流れを風洞乱流あるいは格子乱流（Grid Turbulence）といい，風洞実験のもっとも基本的なもののひとつである．

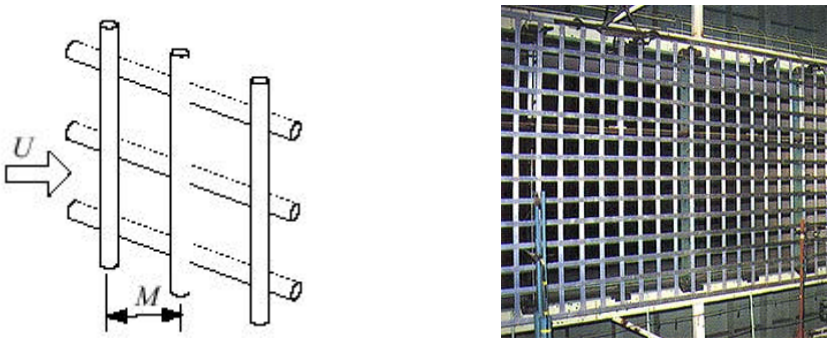


図 6 乱流格子

格子乱流は，格子からの距離とともに乱れが減衰するので，定常ではあるが一様ではない．また，気流の広がりは風洞内に制限される．

格子乱流についての運動方程式は

$$\frac{1}{2}U_1\frac{\partial\overline{u_iu_i}}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\left(u_1\frac{u_iu_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)}=-\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial^2 u_iu_i}{\partial x_1{}^2}}$$

と書けるので，時間微分項は平均速度によって置きかえられる．第 2 項は乱流拡散を表す項であるが，平均速度が速度変動より十分大きい場合は，拡散項は無視できるほど小さい．

したがって，格子乱流を用いることで準一様等方性乱流の性質を調べることが可能である．一様等方性乱流の研究に関しては，添付資料を参照のこと．

一様等方性乱流における 2 点相関の性質について検討する．速度相関テンソルは

$$R_{ij}=A(r)r_ir_j+B(r)\delta_{ij}$$

の形の等方テンソルである．一般に実験において測定されるのは互いに並行な速度成分に関する縦相関 $f(r)=u_1(x)u_1(x+r)$ 及び横相関 $g(r)=u_2(x)u_2(x+r)$ である．$r_{//}=r$, $r_{\perp}=0$ より

$$B=\overline{u^2}g(r)$$

$$A=\overline{u^2}\frac{f(r)-g(r)}{r^2}$$

となる．したがって，

$$R_{ij}=\overline{u^2}\left[\left(f(r)-g(r)\right)\frac{r_ir_j}{r^2}+g(r)\delta_{ij}\right]$$

ソレノイダル条件 $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}=0$ より

$$\overline{\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}u_l(x+r)}=\overline{u_j(x+r)\frac{\partial u_l(x)}{\partial x_l}}=0 \text{ であるから, } \frac{\partial R_{jl}(r)}{\partial x_j}=\frac{\partial R_{lj}(r)}{\partial x_l}=0$$

相関の式に代入して

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}=\overline{u^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(f(r)-g(r)\right)\frac{r_i r_j}{r^2}+g(r)\delta_{ij}\right]=\overline{u^2}\left[\frac{2}{r}f(r)+\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{2}{r}g(r)-\frac{\partial g}{\partial r}+\delta_{ij}\frac{\partial g}{\partial r}+g(r)\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial r}\right]=0$$

$$\therefore \frac{2}{r}f(r)+\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{2}{r}g(r)=0$$

したがって,

$$g(r)=f+\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}$$

すなわち, 一様等方性乱流の速度相関テンソルはただひとつのスカラー関数によって記述される. 風洞実験では速度 u の時系列データから $f(r)$ を求めることが可能であるから, 実験によって相関関数の性質を調べれば, 流れの構造が推定できる.

r=0 では $f_o=g_o=1$ である. また, 積分特性距離は

$$L_f=\int_0^\infty f(r)dr$$

$$L_g=\int_0^\infty g(r)dr=\int_0^\infty\left(f+\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)dr=\int_0^\infty f(r)dr+\left[\frac{r}{2}f(r)\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{2}f(r)dr=\frac{1}{2}L_f$$

と表すことができる.

4. 局所等方性仮説

等方性乱流の概念は仮想的なものであるが, レイノルズ数が大きな流れ場では, その性質が普遍的なものであることを示そう. 観測者がある特定の流体粒子とともに移動しながら, 自分の周囲の流れを調べる場合を想定する. Kolmogorov はこのような考えから座標系を $r=x^{(1)}-x-u(x,t)(t^{(1)}-t)$ を導入した. r は時刻 t において $\boldsymbol{x}$ にあった流体粒子と時刻 $t^{(1)}$ に $\boldsymbol{x}^{(1)}$ にある第二粒子との局所的な距離ベクトルであり, 速度成分は $w_i=u_i(\boldsymbol{x}^{(1)},t^{(1)})-u_i(\boldsymbol{x},t)$ となる.

速度 w_i の 3 成分について, 座標系 $\boldsymbol{r}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)}$, $\boldsymbol{r}^{(3)}$, $\boldsymbol{r}^{(4)}$….. $\boldsymbol{r}^{(n-1)}$ の各組について $3n$ 次元の確率密度関数 F_n を定義する. いま, 考えているすべての点が領域 G 内にあって, F_n が x,t 及び u(x,t)に無関係, あるいは無関係になるように座標系を選べば, 乱れは有限な領域 G において局所一様であるという. 同様に領域 G 内で回転と鏡像に関して分布関数が不変ならば, 領域 G で局所等方であるという. したがって, 流れ場が非等方的であっても, 速度差に関しては, 限定された領域内で流

れが局所等方であることが期待される.

一般に乱流レイノルズ数 Re_L が十分大きく, 領域 G が L に比べて十分小さい ($|\mathbf{r}|<<L$) 場合, 固体壁などを除いて, この仮定は十分に成り立つ. したがって, 一般には大抵の乱流場で局所等方性を仮定できる. 局所等方性が成立する条件は

$$\left|\overline{u_i^2}(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\overline{u_i^2}(\mathbf{x})\right| << \overline{w_i^2}(\mathbf{r})$$

である.

<u>局所相似性の第１仮説</u>

局所等方性乱流の確率密度分布関数 F_n はνとεの大きさだけで一義的に定められる.
2つの基本量ν[m^2/s]とε[m^2/s^3]から特性距離ηと特性時間 t_s を求めると,
Kolmogorov 長さh は

$$\eta=\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}\cdots\cdots\left[\left(\frac{m^6}{s^3}\frac{s^3}{m^2}\right)^{1/4}\right]=[m]$$

特性時間 t_s は

$$t_s=\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\cdots\cdots\left[\left(\frac{m^2}{s}\frac{s^3}{m^2}\right)^{1/2}\right]=[S]$$

となる.
エネルギースペクトル $E(k)$ [m^3/s^2]を 2 つの基本量を使って無次元化する. 無次元スペクトルを $F(kh)$ とすると,

$$E(k)=\nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}F(k\eta)$$

と表せる. 単位を考えよ)

このような統計的な平衡状態が得られるためには, 積分特性距離 L とKolmogorov 長さhの比が十分大きい必要がある. 仮に比が 1000 を越えるような場合, 平衡領域は $r<0.1L$ あるいは $10/L<k<\infty$ となる. 風洞実験ではこのような大きなレイノルズ数に達することは非常に難しい. 参考資料にあるように長い間, 高いレイノルズ数における検証実験が試みられてきたが, それを可能にしたのは Makita による動的乱流発生装置を用いた風洞実験である.

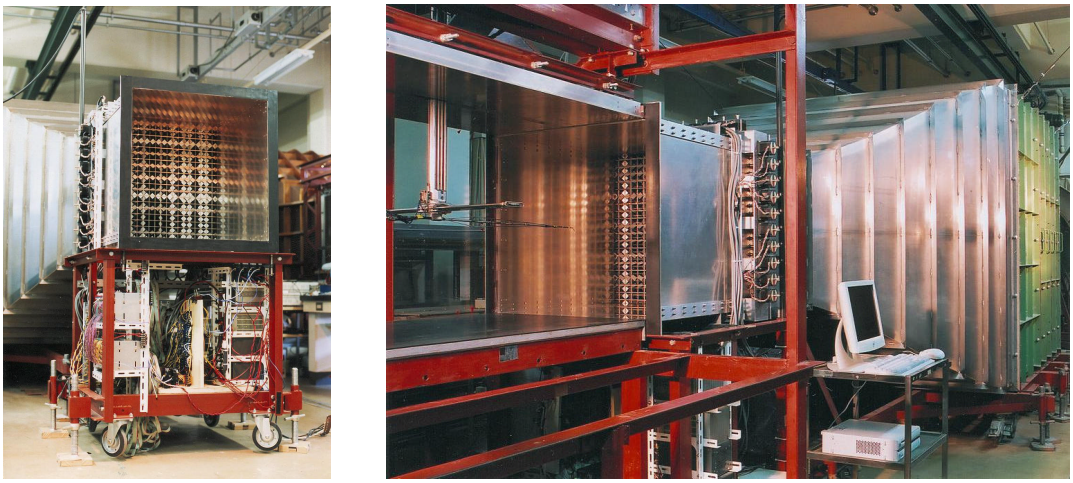


図７ 動的乱流発生装置

2001 年に行われた国際乱流会議において，乱流研究の大御所 Lumley 教授が 20 世紀の乱流研究を総括した際，乱流発生装置は日本独自の研究として紹介された．日本にオリジナリティがあると紹介された乱流研究は残念ながら，この 1 件だけである．

局所相似性の第二仮説

ベクトル $\boldsymbol{r}^{(1)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)}$, $\boldsymbol{r}^{(3)}$, $\boldsymbol{r}^{(4)}$….. $\boldsymbol{r}^{(n-1)}$の絶対値及びそれらの差が h に比べて十分大きく，かつ L よりは小さい場合，確率分布関数はεの大きさで一義的に決まり，νに依存しない．

E(k)がνに無関係になるには，

$$F(k\eta) = \alpha(k\eta)^{-5/3}$$

となる必要がある．ここでαは Kolmogorov 普遍定数である．

Kolmogorov が示した 2 つの仮説は乱流の構造に関して以下のようなモデルを与える．すなわち，流れ場の乱流運動を Fourier 解析し，渦を波数毎に分けて考える場合，Fourier 成分間の相互作用は，同程度の波数同士で最も強く，関与する波数の絶対値が異なるほど弱くなる．したがって，高波数の Fourier 成分と低波数の Fourier 成分は統計的に独立に振舞う．

一方，粘性の影響は高波数領域で顕著であるから，低波数の大きな渦は粘性による直接作用を受けない．しかも，波数の異なる渦の干渉は小さいので，小さい波数（すなわち大きな渦）から非常に大きな波数の渦にエネルギーが直接運ばれることはない．このため，低波数領域の運動は，より大きな波数との相互作用を繰り返し，小さな乱流成分にエネルギーを輸送していく．したがって，流れを特徴づける大きな渦の性質は波数空間を伝播していくうちに次第に失われ，次第に等方化するとともに，普遍的な構造に近づいていく．　→ **カスケードモデル**

特に第二仮説により，波数空間には粘性の作用がほとんどない領域があるので，エネルギースペクトルはただひとつの定数aを用いて表すことができる．この領域ではエネルギースペクトルは波数 khの-5/3 乗に比例する．この領域を（粘性の影響がない）慣性小領域という．

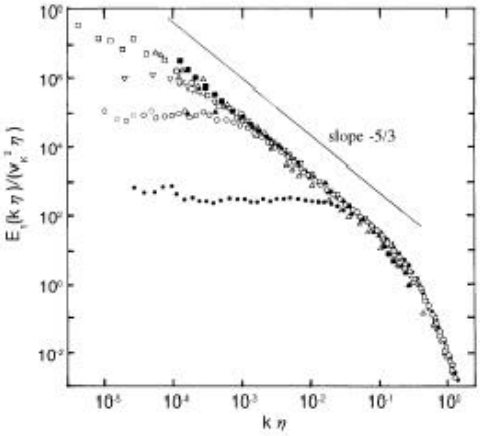


図 12　エネルギースペクトルの比較

●：通常の乱流格子 [21]
$R_M = 1.56 \times 10^4$, $R_\lambda = 25$
▲：大型加圧風洞（Kistler et al [5]）
$R_M = 2.4 \times 10^6$, $R_\lambda = 669$
○：動的乱流格子（Makita [21]）
$R_M = 1.56 \times 10^4$, $R_\lambda = 390$
▽：超大型風洞（Saddoughi et al [8]）, $R_\lambda = 1450$
■：超大型風洞（Gagne et al [6]）, $R_\lambda = 2720$
△：潮流（Grant et al [22]）, Re = 10^8, $R_\lambda > 2000$
□：大気乱流（佐々ら [23]）, $R_\lambda = 2010$

ここでも実際の計測では空間波数ではなく，時系列データを用いる．周波数 f と波数の変換はテイラーの凍結仮説を用いて

$$k = \frac{2\pi f}{U}$$

で表せる．

波数空間におけるエネルギーの輸送は，

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} + T(k) + 2\nu k^2 E(k) = 0$$

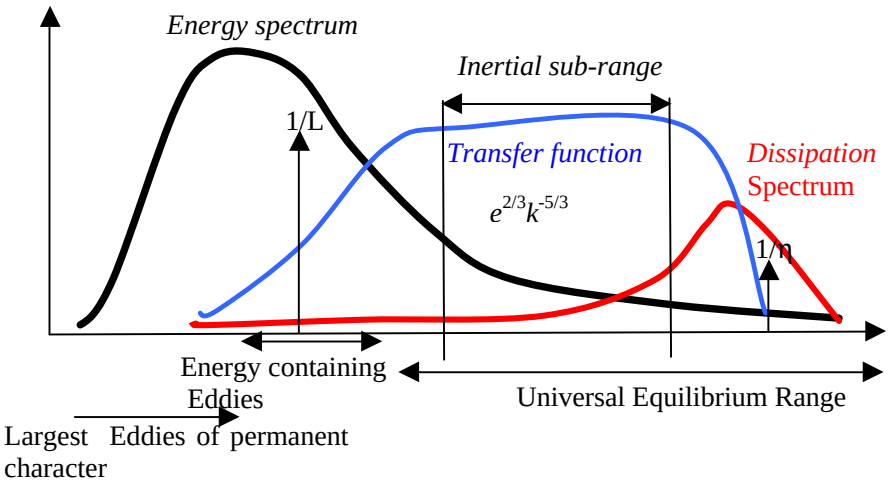
と記述できる．ここで $E(k)$は速度 u のエネルギー・スペクトルである．$T(k)$はエネルギー伝達関数と呼ばれ，周波数空間での乱流エネルギーの伝達を表す．

$$\int_0^\infty T(k)dk = 0$$

であり，

$$\int_0^\infty 2\nu k^2 E(k) = \varepsilon$$

はエネルギー散逸を表す．



慣性小領域において, 相関関数 $f(r)$ に対して

$$r << L \text{に対して} f(r) = 1 - A\left(\frac{r}{L}\right)^{2/3} = 1 - \frac{C}{2\overline{u^2}}(\varepsilon r)^{2/3}$$

が成り立つ. したがって, 散逸εは

$$\varepsilon = \left(\frac{2A}{C}\right)^{3/2} \frac{\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}}{L} = c' \frac{q^3}{L}$$

と表すことができる. 一般に k-εモデルとして知られる乱流モデルは, 上式を用いて定式化される. しかし, ここで注意すべきことは, 上の関係は局所等方性を仮定しており, 一般には高いレイノルズ数においてのみ成立する. さらにあくまでも統計的平均値が上式において成り立つので, 各時刻においてえεと L の間に一定の関係が成立するわけではない. したがって, k-εモデルとはあくまでも時間的な平衡状態を仮定した上での計算モデルであり, タイムステップを小さくすれば, 非定常計算として扱えるものではない.

まとめ

乱流理論の一部について, ごく基礎的な事項について述べた. 乱流理論は応用数学による緻密な理論展開を用いて, 乱流の持つ統計的な振る舞いに物理的な解釈を与えようとするものであり, この小論で乱流理論や実験について詳しく述べることはできない. この小論では乱流を学習するものにとって必須となる局所等方性理論のほんのさわりの部分を述べたに過ぎない. 乱流に関心のある諸君は *Theory of homogeneous turbulence* (Bachelor Cambridge Univ. Press), *Turbulence* (Hinze McGrowHill), *A First course in Turbulence* (Tennekes and Lumley 日本語訳 藤原・荒川 東海大学出版)や統計流体力学 (モーニン・ヤグロム 日本語訳 山田・中野 文一総合出版)等の乱流理論に関するテキストでさらに勉強していただきたい.