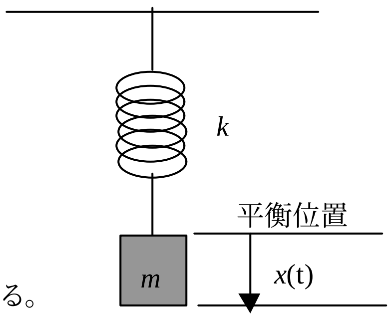
流体計測特論

機械工学科 飯田 明由

要　約

工学的な問題の多くは、実験や計算によって得られた物理的な情報をなんらかの形で処理して、利用する。したがって、“観測”されたデータを目的に応じて処理するプロセスが重要となる。本講義では物理データの取得とその分析方法の基礎について述べる。

1．物理データの基礎的記述



確定データ：線形のバネにつるされた剛体の運動

$$x(t) = X\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad (1.1)$$

この式は将来のいかなる瞬間についても剛体の正確な位置を定める。

このような物理的なデータは確定的であるという。

例）　地球上の軌道をまわる衛星の運動

　　　抵抗を介して放電されるコンデンサ両端の電圧

　　　加熱中の水の温度

非確定的なデータ：将来のある瞬間の正確な値が予測できないような値

例)　　あれた海の波の高さ

　　　パイプを吹き抜ける空気によって発生する音

　　　ノイズ発生装置の出力電圧

身近な例: 天気予報

天気予報を行うには地球上の各地点における計測データを境界条件として、NS 方程式を解けば良い。原理的には可能だが、実際には　境界条件となる各地のデータには誤差が伴う（どんなに観測を正確に行っても測定には誤差がつきまとう)。

測定を分子やさらに小さな素粒子レベルまで拡張して、より厳密な境界条件を考えようとしても、物体の位置と運動量の測定には、

　位置の測定の不確定さをΔx,

　運動量の不確定さをΔpx

があり、これらの積$\Delta x \cdot \Delta px$ は プランク定数 h のオーダーを下回ることはないという物理学的な制約がある。（ハイゼンベルグの不確定性原理）

このため、非線形性が非常に強い NS 方程式の場合、初期条件の誤差によって将来の値が予測

できなくなる。
長期の天気予報があたらないのはこのためである。このことは映画「ジェラッシクパーク」でも有名なバタフライ理論として知られている。

「ある日、ある時間にあるチョウがアマゾンでぱたぱたと羽ばたいという事実があり、翌週シカゴで雨が降ったという別の事実があったとする。」

この２つの事実の間に関係がないと証明することはできない。関係があるとの証明のできない。つまり、あらゆるものが、あらゆるものに関係しうる可能性がある。

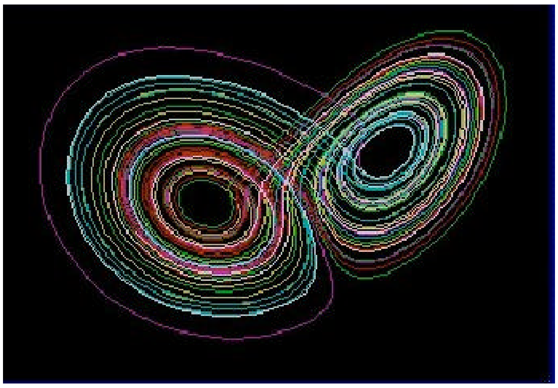
NS 方程式自体は確定論的な方程式であり、初期条件と境界条件が定まれば一意的に将来の値が決定する。しかし、一般には初期条件や境界条件には誤差があるため、将来の値、あるいはある地点の値を決定論的に求めることはできない。決定論的な方程式から将来が予測できないような場合、そのような現象をカオスという。工学的に問題となる流体現象のほとんどは乱流であり、将来の値が決定論的に予測することは困難である。

決定論的な方程式が奇妙な振る舞いをする例として以下のようなローレンツの方程式がある。

$$\frac{dx}{dt}=10(y-x)$$

$$\frac{dy}{dt}=28x-y-xz$$

$$\frac{dz}{dt}=xy-2.667z$$

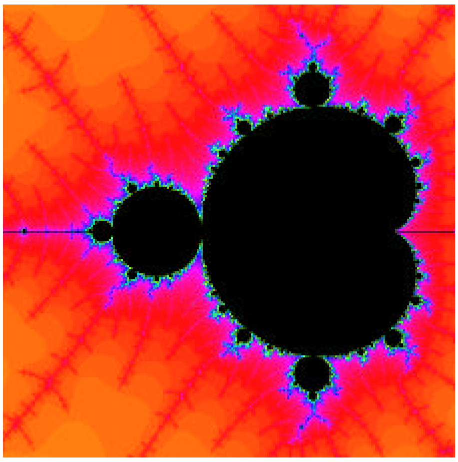
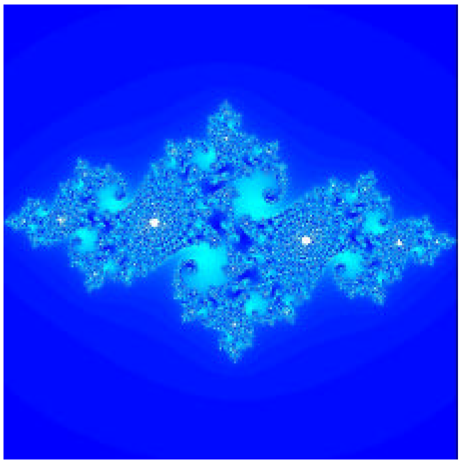


この簡単な方程式の解は右図のような不思議な軌道をとり、決して一点に収束しない。したがって、将来の解は不確定である。（ただし、将来の値は軌道が描くある分布関数の中にあるので、統計的には軌道の範囲にあることを予測することができる。）

カオスと同じように乱流あるいは NS 方程式が持つ数学的な奇妙さがフラクタル性である。
フラクタルとは、特徴的な長さを持たないような図形や構造、現象などの総称であり、フラクタルの最も重要な特徴は、"自己相似性"と呼ばれる性質である。これは、ある物体をどんなに細かく分割してみても、もとの形と同じものがあらわれるというものある。

簡単な例で言うと、木がそれに当たる。木は遠くから見ると幹があり、そこから枝がどんどん分かれて行くという構造をしているが、その枝一本一本を見ると、その枝からもさらに枝が出て、もとの木と同じような構造をしている。このような繰り返し構造を持つもののなかの特殊なものをフラクタルという。

フラクタルを表す有名な図形にマンデルブロー集合やジュリア集合がある。下図は複素平面における簡単な方程式(f(z)=z2+c, z0=0, c=a+bi, a：-1.485～-1.473, b：-0.006～0.006)から得られる図である。非常に単純な式から複雑な図形が得られる。

精度の悪い人工衛星から見たときの海岸線の写真とやや精度の良い人工衛星、航空写真と比べていくと、全体の精度（ディテールがはっきりする）は向上するが、海岸線というものの全体の印象はあまり変わらない。マンデルブロー集合の図の一部を拡大してみていくと、海岸線のようにいくらでも細かい図形が現れるだけでなく、その印象は拡大回数にかかわらず一定である。このような自己相似性は、力学的問題を解く上で大きな問題である。なぜなら全体は部分と相似であるということであるから、線分はいくらでも分割可能であり、このことは境界が微分係数を持たないということに相当する。したがって、至るところ微分不可能となり微分方程式が成り立たなくなる。

実際にはカオスやフラクタルの問題は、観測可能な誤差の範囲内において物理現象を統計的に扱うことで回避することが多い。したがって、一般に乱流の問題を扱う場合、現象は決定論的ではなく、統計論的に扱うことになる。本稿では観測データを統計的に扱うために必要な非定常・ランダムデータに関する基礎的な事項について解説する。

2. ランダムデータの分類

ランダムデータを表す一つの時刻歴は標本関数（Sample function）と呼ばれる。ランダム現象から生じたであろうすべての標本関数の集まりを不規則過程（random process）と呼ぶ。
不規則過程は定常と非定常に分類される。

2.1 定常不規則過程

不規則過程で現象が表される場合、現象の正確はいかなる瞬間も標本地の集まりから求めた平均値によって記述できると期待される。
不規則過程をなす標本関数の集まり（ensemble）を考える。

平均値(mean value) μは

$$\mu = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)$$

と表すことができる。

標本関数の結合モーメント（自己相関関数 autocorrelation function）は

$$R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)x_k(t_1+\tau)$$

となる。

もし、μと R が時刻 t1 が変わるとともに変わる場合、不規則過程{x(t)}は非定常（non- stationary）であるという。μと R が時刻 t に依存しない場合、不規則過程{x(t)}は弱定常（weakly stationary）、または狭い意味で定常であるという。不規則過程{x(t)}の高次モーメントと結合モーメントが時間に関して不変な場合、不規則過程{x(t)}は強定常（strongly stationary）または定常であるという。

2.2 エルゴート仮説

不規則過程{x(t)}の平均値を求めるには、不規則過程{x(t)}の標本平均を集める必要があるが、一般には困難な場合が多い。しかし、多くの場合、集合の中の特定の標本関数について時間平均を行うことで定常不規則過程の性質を記述することが可能である。すなわち平均及び自己相関関数は

$$\mu = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)\,dt$$

$$R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)x_k(t+\tau)\,dt$$

と表すことができる。もし、不規則過程{x（t）}が定常であって、時間平均が異なる時刻におけるものと等しいのであれば、不規則過程はエルゴート的(ergodic)であるという。数学的には定常過程のみがエルゴート的である。エルゴート的な不規則過程はだたひとつの標本関数の時間平均からすべての標本の性質を調べることができる。

物理現象を表す定常的なランダムデータの多くは、一般にエルゴート的である。定常ランダムデータの性質を観測されたひとつの時刻歴から検討できるのは、この理由によるものである。

2.3 非定常不規則過程

非定常不規則過程は先に示した性質を持たないものであるから、一般にその平均値や相関関数を求めるには、すべての標本関数のアンサンブル平均が必要となる。しかし、一般的に標本関数の集合を求めることは困難な場合が多い。そこである定常不規則過程の標本関数 x(t)を用いて、非定常不規則過程 y(t)を

$y(t) = A(t)x(t)$

で記述する。A（t）は標本関数の確定的な倍率である。

したがって、共通な時間傾向を有する標本関数を用いて非定常不規則過程を記述することが可能な場合、集合平均を用いることなく現象を記述することが可能である。

（一般には流体現象は定常でも、エルゴート的でもない。したがって、計測データ及び解析データによって得られたいかなる時間平均値も、標本関数のアンサブル平均と等しいという保証はない。多くの場合、非定常不規則過程であっても十分長い平均時間をとれば、弱エルゴート的とみなせるという仮定の上で分析を行っている。したがって、乱流の統計解析においては平均時間やデータの取得時間は非常に重要な意味を持つ）

2.4 ランダムデータの統計的性質

ランダムデータの統計的性質は基本的に以下の４つの統計量によって記述される。

（1）2乗平均値

いかなるランダムデータの一般的な強さも 2乗平均値（mean square value）によって記述される。

$$\varphi^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\,dt$$

2乗平均値の平方根は実効値または rms 値と呼ばれる。

物理的データを静的(static)な成分と動的(dynamic)な成分に分けて考えると、static な成分は平均値で記述される。

一方、動的な成分は平均値との差の 2乗平均値で分散（variance）で記述される。

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu]^2\,dt$$

分散の正の平方根は標準偏差である。

（2）確率密度関数

ランダムデータの確率密度関数は、ある瞬間に定まった幅の中にデータがある確率を記述する。観測時間を T、信号を x（t）とするとき、信号の値が x～x＋Δx の間の値を取る確率は、信号が x～x＋Δx の間にあった総和時間を T_xとすると、T_x /T と考えられる。T が無限大に近づけば、確率は正確な値となる。

$$\Pr ob[x < x(t) < x+\Delta x] = \lim_{T\to\infty}\frac{T_x}{T}$$

小さなΔx に対して、確率密度関数（probability density function）p は

$$\Pr ob[x < x(t) < x+\Delta x] = p(x)\Delta x$$

となる。確率密度関数は非負の実数関数である。

確率密度関数をマイナス無限大から x まで積分したものを確率分布関数（probability distribution function）という。

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(\xi)d\xi$$

確率密度関数と平均値の間には以下の関係がある。

$$\mu(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

一方、２乗平均値に対しては、

$$\varphi^2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx$$

の関係がある。

確率密度関数が

$$p(x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right]$$

で表されるとき確率変数はガウス（正規）分布に従う。独立な確率変数の和の確率分布は正規分布に近づく。これを中心極限定理という。すなわち、データの数が十分多い場合、互いに独立な（言いかえればランダムな）信号の確率密度は正規分布に近づく。多くの物理現象はこの中心極限定理を満たすことから、ランダムデータを正規分布と仮定して理論的な考察を行うことが多い。仮に現象が正規分布でない場合でも、正規分布からずれを３次及び４次のモーメントを使って評価する。これらの高次モーメントの結合確率分布を用いて現象を評価することもある。

スキューネス（skewness）：

平均値のまわりの３次モーメントをσ^3で正規化したもの。平均値のまわりの非対称性を示す指標。（正規分布の場合０）

$$S=\frac{1}{\sigma^3}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k-\mu\right)^3\right]$$

クルトシス（Kurtosis）

平均値のまわりの４次モーメントをσ^4で正規化したもので、波形の尖鋭度を表す指標。（正規分布の場合3）

$$K=\frac{1}{\sigma^4}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k-\mu\right)^4\right]$$

(3) 自己相関関数

ランダムデータの自己相関関数は、ある時刻のデータの値が他の時刻の値に対して、どのような影響を持っているかを表している。自己相関関数は時刻tとt+τにおける２つの値の積を観測時間Tにわたって平均することで得られる。すなわち、

$$R(t_1, t_1+\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)x_k(t+\tau)\,dt$$

Rは常に実数値の偶関数であり、τ=0で最大値をとる。
自己相関関数は正弦波のような特別な場合を除いて、

$$\mu = \sqrt{R(\infty)}$$

となる。また、

$$\varphi^2 = R(0)$$

である。

（4）パワースペクトル

いかなるランダム信号もフーリエ級数に展開できることから、正弦波（及び余弦波）の組み合わせとして記述することができる。したがって、時系列x（t）のランダムデータは周波数空間で記述することができる。あるいは、x（t）を周波数f～f+Δfの鋭い遮断周波数を持つ帯域フィルタを通過させた場合、観測時間Tが無限に長ければ、

$$\varphi^2(f,\Delta f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t, f, \Delta f)\,dt$$

となる。
ここで小さなΔfに対するパワースペクトル密度関数（power spectral density function）G(f)は

$$\varphi^2(f,\Delta f) = G(f)\Delta f$$

である。Gは実数非負関数である。
パワースペクトルと自己相関関数の間には

$$G(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 4\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

の関係があり、自己相関関数からパワースペクトルを求めることができる。平均値及び実効値との間に以下の関係が成り立つ。

$$\mu = \left[\int_{o-}^{0+} G(f)df\right]^{1/2}$$

$$\varphi = \int_o^{\infty+} G(f)df^{\;1/2}$$

3.サンプリング定理

ランダムデータは通常、離散的に取られたサンプル値の列によって処理・解析される。具体的にはパソコン等に設置されたA/Dコンバータによってアナログ電気信号がパソコンにデジタルデータとして取り込まれる。この際、A/Dコンバータの性能を表す数値として、サンプリング周波数10kHz,量子

化16ビットなどと表示される。量子化16ビットというのは測定電圧レンジ（たとえば±5V）を2^{16}＝65536に分割することである。したがって、この場合、電圧の分解能は0.15mVである。一方、サンプリング周波数は電圧を測定する時間刻みの逆数である。デジタルデータでは、サンプリング周波数より高い周波数の信号を再現することはできない。したがって、データを取得する場合、サンプリング周波数が重要となる。

不規則過程x(t)が時刻０からTまで記録され、その他の時間では0だと仮定すると、そのフーリエ変換は

$$X(f)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

と表せる。x（t）を周期Tで繰り返し現れる周期関数と仮定すると、

$$x(t)=\sum Ane^{j2\pi ft/T}$$

したがって、

$$X(\frac{n}{T})=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft/T}\,dt=TAn$$

よってすべてのtに対するx(t)が決まり、すべてのfに対してX（f）が定まる。（サンプリング定理）

一方、フーリエ変換X（f）が周波数-B～Bの間に存在する場合を考える。上と同様に考えれば、

$$x(\frac{n}{2B})=\int_{-B}^{B}X(f)e^{j\pi nf/B}df=2BCn$$

となり、x（n/2B）よりすべてのfに対するX（f）が求まる。したがって、ｘ（ｔ）を記述するために必要なサンプルの数は

$$N=\frac{2B}{1/T}=2BT$$

となる。したがって、周波数Bの信号を記述するにはN/T=2Bの周波数でデータを取得する必要があり、測定したい周波数の2倍以上の周波数でサンプリングする必要がある。

サンプリング定理は、時間的に連続な信号とそれをサンプリングする速さの関係について情報が保たれる限界を示すもので、「信号に含まれる最高周波数成分の２倍以上の周波数でサンプルしなければならない」ということを示している。サンプリング周波数が信号の周波数の２倍より低くなると、エイリアシング（折返しひずみ）が生じます。（古い映画等で馬車の車輪が実際の回転方向と反対向きに回って見える現象）

したがって、実験を行う場合、測定するべき周波数（見たい現象の周波数）の2倍以上（一般に2.5倍程度）でサンプリングする必要がある。なお、市販のFFTアナライザー等では表示されている周波数が測定できるように内部で2.5倍強のサンプリングを行っている場合が多い。