

## 軌道形状に基づく投射体の空力係数の推定法

安田 海人<sup>\*1</sup>, 坪井 一洋<sup>\*2</sup>, 田中 晃平<sup>\*3</sup>, 宮崎 武<sup>\*4</sup>

### Estimating Method of Aerodynamic Coefficients for a Projectile with Trajectories

Kaito YASUDA<sup>\*1</sup>, Kazuhiro TSUBOI<sup>\*2</sup>, Kohei TANAKA<sup>\*3</sup> and Takeshi MIYAZAKI<sup>\*4</sup>

<sup>\*1</sup> Graduate School of Sci. and Eng., Ibaraki University  
Nakanarusawa 4-12-1, Hitachi, 316-8511 Japan

We investigate estimation methods of aerodynamic coefficients for a projectile by using characteristic quantities in its trajectory. One method is based on the quantities representing the whole shape of trajectory while the other utilizes local quantities such as curvature and/or torsion. In the former, the flight distance and the maximum height are measured, and the motion equation predicts numerical values of these quantities with measured initial condition and preset aerodynamic coefficients. Then the optimal combination of the aerodynamic coefficients is determined by minimizing the error between the measured and estimated values of the characteristic quantities. This method is applied to estimate drag and lift coefficients of a soccer ball in back-spinning, and the result shows that the averaged values of  $C_D$  and  $C_L$  are 0.205 and 0.237, respectively. In the latter method, the expressions between the aerodynamic coefficients and the geometrical quantities of trajectory are derived, which suggests that the piecewise quadratic interpolation on a trajectory provides the aerodynamic coefficients. This method enables to locally estimate the coefficients, and therefore clarifies the variation of the coefficients along a trajectory. Measured data for a table tennis ball is analyzed with the method and we obtain successfully the drag and lift coefficients in flight condition. The results indicate the qualitative difference of spinning effect in drag and lift coefficients.

**Key Words** : Projectile, Aerodynamic coefficients, Estimation Method, Trajectory Shape, Soccer Ball, Table Tennis Ball

### 1. 緒 言

球技ではボールに回転を加えることでその軌道を意図的に変化させたり,あるいは逆に無回転にすることで予測が困難な不規則軌道を実現したりすることがある. ボールの軌道はボールのもつ空力特性の反映であるから, 飛翔中のボールの空力特性に関する研究は古くから行われてきた. 特にゴルフボールのディンプル<sup>(1)(2)</sup>や野球ボールの縫い目<sup>(3)(4)</sup>が空気力に及ぼす影響について主に研究されている. またサッカーボールに関しても, ボールの製造技術が進歩したことで無回転のシュートを意図して蹴ることができるようになった. そのため, 近年ではサッカーボールの軌道も注目され, 無回転シュートに関する研究<sup>(5)</sup>やサッカーボールの空力特性に関する研究<sup>(6)</sup>などが行われている.

ボールなど投射体の空力特性を調べる方法としては風洞実験が一般的である<sup>(1)(3)</sup>. 風洞実験の場合, 気流中にボールを支えるための工夫や回転させるための駆動装置が必要となるため, 回転体の空力特性を正確に求めることは容易なことではない. さらに, この方法では定まった条件下での空力特性は明らかにできるが, その条件が飛翔中の条件と必ずしも一致しない可能性がある. 一般に物体の空力特性はレイノルズ数を用いて表される. しかし, 飛翔中のボールには空気抵抗などが働くため進行速度は徐々に変化する. このことは飛翔中のボールを過ぎる気流のレイノルズ数は時々刻々変化していることを意味する.

<sup>\*1</sup> 非会員, 茨城大学大学院理工学研究科 (〒316-8511 日立市中成沢町 4-12-1)

<sup>\*2</sup> 正員, 茨城大学 工学部

<sup>\*3</sup> 非会員, 電気通信大学大学院

<sup>\*4</sup> 正員, 電気通信大学大学院

E-mail: ktsuboi@mx.ibaraki.ac.jp

そこで、風洞実験とは異なる測定方法として飛翔中のボールの位置情報から空力特性を評価する手法が試みられている<sup>(7)(10)</sup>。ボールの軌道がボールに働く空気力によって決まることを考えると、この方法はいわゆる投射問題に対する逆問題として位置付けることができる。その際、軌道と空力係数が1対1対応である数学的根拠は十分に明らかとはいえないが、このことが問題となるような事例は今のところ報告されていないようである。したがって、飛翔中のボールの位置情報に基づく空力特性の評価は実用的な観点から十分意味のある方法と考えられる。実際、この方法によって硬式野球ボールの抵抗急減現象<sup>(4)</sup>や負の Magnus 効果<sup>(10)</sup>などについての詳しい検討が行われている。

しかし、これまで行われてきたボール軌道に基づく空力特性の評価法では、基本的に空力係数の軌道全体にわたる平均値を求めることに主眼が置かれている。すでに述べたように、ボールを過ぎる気流のレイノルズ数が時々刻々変化していることを考えると、軌道上の位置によって空力特性も変化することになる。位置情報に基づく空力係数の評価をある種の逆問題と考えるならば、空力係数の位置による変化を同定することも原理的には可能ではなくである。

そこで本論文では、投射体の軌道形状データから投射体の空力係数を求めることを試みる。特に軌道形状を表わす特徴量として、水平方向最大距離や鉛直方向最大距離など軌道の大域的形状を表わす量と曲率や振率など局所的に決まる量の両者を考えた。特に後者に基づく方法では、空気力として抵抗、揚力および横力を含んだ質点の運動方程式を考え、この方程式に空間曲線論を適用することによって軌道の幾何学量と空力係数を関連付けた。そして、サッカーボールと卓球ボールに対して行われた測定結果に今回の方法を適用することでそれぞれの空力係数を評価した。

## 2. 運動方程式

投射体の投射位置を座標原点にとり、鉛直上向きに  $z$  軸、そして初速度が  $x-z$  平面に含まれるように  $x$  軸を定義する。このとき投射体の運動方程式は次のように書ける。

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - g\mathbf{e}_z \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{x} = (x, y, z)'$  と  $\mathbf{v} = (u, v, w)'$  はそれぞれ投射体の位置ベクトルと速度ベクトル、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{e}_z$  は  $z$  軸の単位ベクトルである。また、 $\mathbf{F}$  は投射体が空気から受ける力であるが、以下での式を簡単にするため単位質量あたりの力を考える。

投射体に働く空気力  $\mathbf{F}$  は以下のように進行方向逆向きに働く空気抵抗  $\mathbf{D}$  とそれに直交する力  $\mathbf{N}$  に分解できる。このうち後者は投射体の回転による Magnus 効果などにより発生する力の効果を表わす。

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} + \mathbf{N} = -D\mathbf{e}_t + N\mathbf{e}_N \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{e}_t$  は投射体の速度の単位ベクトル（軌道の接線方向単位ベクトル）であり、速度ベクトル  $\mathbf{v}$  とその大きさ  $q = |\mathbf{v}|$  との間に  $\mathbf{v} = q\mathbf{e}_t$  の関係がある。

一方、単位ベクトル  $\mathbf{e}_N$  は定義より  $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_N = 0$  である。この方向の力  $\mathbf{N}$  はさらに揚力と横力に分解できる。例えば、Magnus 効果を考えると  $\mathbf{e}_N$  の方向は次式で与えられる。

$$\mathbf{e}_N \propto \mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_t \quad (3)$$

ただし  $\mathbf{e}_A$  は自転軸の単位ベクトルである。

投射体に働く抵抗や Magnus 力の大きさは一般に速度の自乗に比例すると考えてよい。このとき、それぞれの力は、投射体の質量を  $m$  として

$$\mathbf{D} = -\frac{k}{m}q\mathbf{v}, \quad \mathbf{N} = \frac{l}{m}q\mathbf{e}_A \times \mathbf{v} \quad (4)$$

と表される. ここで

$$k = \frac{1}{2} \rho S C_D, \quad l = \frac{1}{2} \rho S C_L \quad (5)$$

であり,  $\rho$ は空気密度,  $S$ は投射体の投影断面積,  $C_D$ と $C_L$ はそれぞれ抵抗係数と揚力係数である.

式(4)を式(2)とともに式(1)に代入すると, 投射体の運動方程式は次式となる.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{k}{m} q \mathbf{v} + \frac{l}{m} q \mathbf{e}_A \times \mathbf{v} - g \mathbf{e}_z \quad (6)$$

特に自転軸が $y$ 軸の負方向に固定された場合(いわゆるバックスピン)を考えると, 式(4)の第2式に $\mathbf{e}_A = (0, -1, 0)^t$ を代入して

$$\mathbf{N} = \frac{l}{m} q (0, -1, 0)^t \times (u, v, w)^t = \frac{l}{m} q (-w, 0, u)^t$$

となるので投射体には $y$ 軸方向(進行方向に対して横方向)の力は働かない. したがって, この場合の投射体の運動方程式は

$$\dot{u} = -\frac{k}{m} qu - \frac{l}{m} qw, \quad \dot{w} = -\frac{k}{m} qw + \frac{l}{m} qu - g \quad (7)$$

となり, その運動は $x-z$ 平面内の2次元運動に限られる<sup>(11)</sup>.

### 3. 大域的特徴量による推定

ここでは軌道形状の特徴量の実測値と運動方程式による軌道シミュレーションから飛翔中のサッカーボールの空力係数を評価した. 軌道の特徴量として水平方向の最大距離(飛距離)と鉛直方向の最大距離(最大高さ)を考え, それらを実測により求めた. 同時にその際の初速度と初速角も計測し, それらの値を用いた軌道シミュレーションを行い, これらの特徴量と比較することによってサッカーボールの空力係数を評価した.

このような軌道の大域的特徴量を用いた方法はゴルフボールのドライバーショットにその例が見られ, その際には上にあげた2つの特徴量以外にもいくつかの量が測定されている<sup>(7)</sup>. ドライバーショットの場合にはゴルフボールの空力特性が飛翔中にかなり大きく変化するためこのような対応が必要となるが, サッカーボールではそれほど大きく変化はしないと予想できるので上にあげた2つの特徴量による評価を考えた.

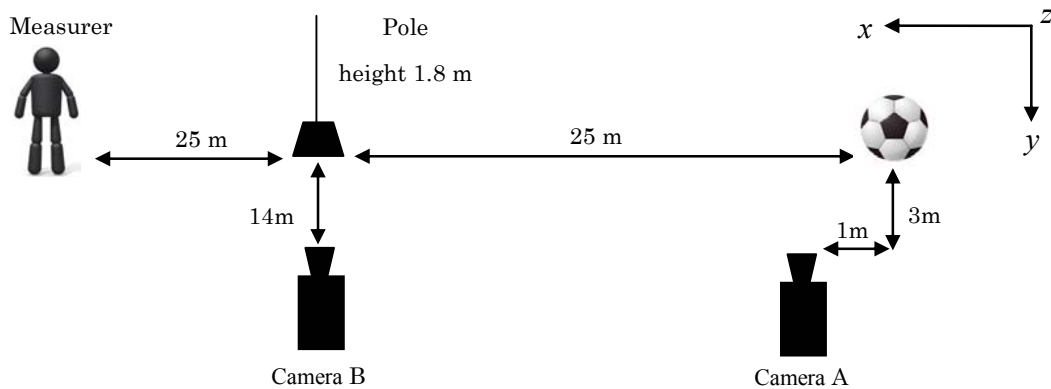


Fig. 1 Configuration in measurement for soccer ball trajectory

試技者はサッカー経験者2名で合わせて14回の計測を行った。今回使用した計測方法を図1に示す。ボールはSPEED CELL (Adidas 社)を使用した。蹴り出し位置に設定したカメラA (EX-ZR300, CASIO 社)でボールを蹴り出す瞬間を撮影し、その映像から速度と角度を求めて初速度と初速角(蹴り出し角)とした。飛距離 $L_0$ は落下点をメジャーで計測する。最大高さ $H_0$ はカメラB (iVIS HF S21, Canon 社)で撮影した映像から求める。映像から最大高さを求める際には画面上のポールを長さの基準とした。そのため、カメラBとポールはボールがほぼ最大高さになると予想される25m地点に設置している。

なお、今回はボールがバックスピんで飛翔することを前提にした。そのため飛距離計測の際には、ボールの回転状況を前方から目視で観察し、バックスピんで大きく外れた回転をしていた場合には計測結果から除外した。また、実測場所が屋外であるため風の影響は不可避である。そこで、風の影響を小さくするため可能な限り風が収まった状態を確認したうえで実測を行った。

実測による初速度 $q_0$ と蹴り出し角 $\theta_0$ を初期条件として式(7)からボールの軌道を求めることができる。その際、抵抗係数 $C_D$ と揚力係数 $C_L$ の値を仮定することで、これらの空力係数値に対するボールの飛距離 $L$ と最大高さ $H$ が決まる。これらの予測値と計測値( $L_0$ ならびに $H_0$ )との誤差を次式で評価する。

$$\varepsilon = \sqrt{(L_0 - L)^2 + (H_0 - H)^2} \quad (8)$$

抵抗係数 $C_D$ と揚力係数 $C_L$ の組み合わせを順次変化させ、それぞれの組み合わせごとに式(8)により誤差 $\varepsilon$ を求める。そして誤差が最小となる $C_D$ と $C_L$ の組み合わせを探索することで空力係数を決定した。実際には $C_D$ と $C_L$ の範囲をともに0.0から0.5とし、これらを0.01刻みで変化させることで誤差最小点を求めた。

実測した14個のデータに対して、この手順によって求めた誤差最小の $C_D$ と $C_L$ の組み合わせを表1にまとめる。表中には、揚抗比と誤差の最小値も示した。また、表中のデータNo. 1に対する誤差分布の例を図2に示す。同図中の赤丸が誤差最小となる $C_D$ と $C_L$ の組み合わせである。

表1の結果をみると $C_D$ は0.11~0.26(平均値0.21)、 $C_L$ では0.11~0.31(平均値0.24)、揚抗比は0.75~1.50(平均値1.15)の範囲でかなりばらつきが見られる。この原因としてボールの回転の影響が考えられる。すでに述べたように、今回の評価ではボールのバックスピンを仮定したが、実際のボールでどの程度のバックスピんで実現されたかは目視程度の確認でしかない。また、回転数の計測は行っていないので空力係数と回転数の関係も考慮されておらず、それもばらつきの一因と考えられる。

Table 1 Measured and estimated results for aerodynamic coefficients of soccer ball

No.	Kicker	$q_0$ (km/h)	$\theta_0$ (°)	$L_0$ (m)	$H_0$ (m)	$C_D$	$C_L$	$C_L / C_D$	$\varepsilon$
1	A	86	25.5	42.1	6.6	0.20	0.15	0.75	0.15091
2	B	92	22	47.0	7.5	0.26	0.27	1.03	0.24381
3	A	82	29	46.8	8.1	0.13	0.18	1.3	0.07091
4	B	90	27	46.3	8.0	0.21	0.17	0.81	0.06012
5	B	95	20	50.6	8.2	0.26	0.31	1.19	0.23184
6	A	86	28.5	47.8	10.2	0.21	0.30	1.42	0.13062
7	B	85	25	49.1	8.0	0.16	0.24	1.5	0.04289
8	A	83	25	41.9	7.3	0.25	0.29	1.16	0.18977
9	A	90	25.5	48.3	8.9	0.23	0.26	1.13	0.24001
10	B	88	21	44.5	5.0	0.11	0.11	1.00	0.07336
11	A	78	25	39.1	6.3	0.22	0.28	1.27	0.09239
12	B	93	17	49.2	5.9	0.22	0.27	1.22	0.22238
13	A	88	25.5	48.6	9.1	0.21	0.27	1.28	0.20725
14	B	91	22	47.9	6.9	0.21	0.22	1.04	0.12097

表 1 の結果を揚抗比の観点からまとめた結果を図 3 に示す. この図では横軸に  $C_D$ , 縦軸に  $C_L$  をとっており図中の傾きが揚抗比を示す. 同図中のプロット点が表 1 の各結果であり, 参考までに揚抗比が 0.75, 1.0 および 1.25 に対応する直線も示している. この図をみると今回求めた結果は揚抗比 1.25 のまわりに分布しており, サッカーボールに対する既存の結果<sup>(12)</sup> ( $C_D=0.20$ ,  $C_L=0.25$ ,  $C_L/C_D=1.25$ ) を十分に支持している.

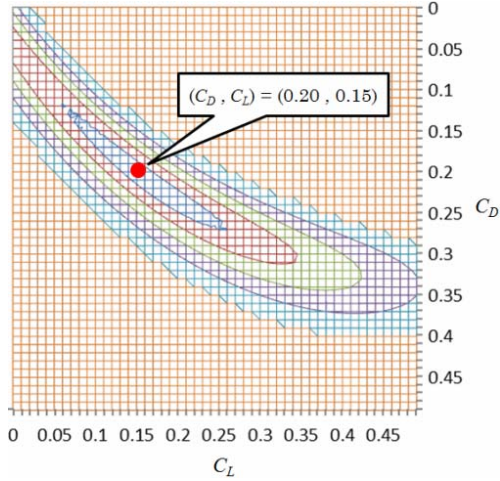


Fig. 2 Error distribution (data No. 1 in Table 1)

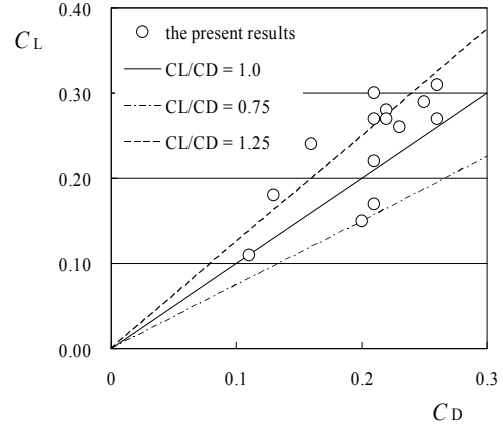


Fig. 3 Aerodynamic coefficients of soccer ball in flight

#### 4. 局所的特徴量による推定

##### 4・1 軌道の幾何学量と空力係数

投射体の軌道は一般に 3 次元空間内の曲線を描くので, その軌道の記述に空間曲線論を導入することができる. 式 (1) と式 (2) より運動方程式は次式である.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{N} - g\mathbf{e}_z \quad (9)$$

式 (9) の両辺と速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の内積をとると, 左辺は

$$\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2} \right) = q\dot{q}$$

同様に右辺は

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} - g\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = -Dq - g\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = -q(D + g\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z)$$

となるので抵抗の大きさ  $D$  は次式で与えられる.

$$D = -(\dot{q} + g\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z) \quad (10)$$

次に, 空間曲線に対して曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  はそれぞれ次式で定義される<sup>(13)</sup>.

$$\kappa \mathbf{e}_n = \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} = \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{q^3} \quad (11)$$

$$\tau = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^3} = \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})}{\kappa^2 q^6} \quad (12)$$

ここで式 (11) の  $\mathbf{e}_n$  は主法線ベクトルを表わす.

式 (11) に式 (9) を代入して整理すると

$$\kappa \mathbf{e}_n = \frac{1}{q^2} [\mathbf{N} - g\{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_t\}] \quad (13)$$

が得られる. この式の右辺第 2 項が揚力の方向を与えることに注意する. つまり, 軌道に垂直な空気力  $\mathbf{N}$  と軌道の法平面内にある重力成分の合力が主法線ベクトル  $\mathbf{e}_n$  の方向を与える.

同様に, 式 (12) に式 (9) を代入すると振率に対して以下の結果が得られる.

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{e}_b}{\kappa q^3} \quad (14)$$

ここで  $\mathbf{e}_b$  は陪法線ベクトルで  $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$  で定義される.

式 (14) は軌道に垂直な力 (いわゆる揚力や横力) の時間変化によって軌道に振れが発生することを示している. 一般に平面運動は  $\tau = 0$  で特徴付けられる. 例えば, 本論文の座標系での平面運動では  $\mathbf{N}$  とその時間変化は  $x-z$  平面内で生じる. その際の陪法線ベクトル  $\mathbf{e}_b$  は定義より  $x-z$  平面に垂直になるので式 (14) の分子は常に 0 である.

式 (7) で与えられた 2 次元の運動方程式の場合には, 抵抗係数と揚力係数はそれぞれ以下のような簡単な形で表わされる.

$$\frac{k}{m} = -\frac{q\dot{q} + gw}{q^3} = -\frac{1}{q^3}(u\dot{u} + w\dot{w} + gw) \quad (15)$$

$$\frac{l}{m} = \kappa + \frac{gu}{q^3} = \frac{1}{q^3}(u\dot{w} - \dot{u}w + gu) \quad (16)$$

#### 4・2 卓球ボールの空力係数評価

前節で導いた式 (15) および式 (16) によると, 投射体の速度と加速度が知れば抵抗係数と揚力係数を算出することができる. そこで投射体の位置データを使って軌道を部分的に補間することで上記の量を求めることを考える. ここでは最も簡単な補間として位置座標  $(x, z)$  を時間の 2 次関数として表わすことにする.

今, 時刻  $t = t_0$  での  $x$  または  $z$  の値を  $f_0$  として,  $t = t_0$  より前の時刻  $t = t_+$  での軌道上の位置座標を  $f_+$ ,  $t = t_0$  より後の時刻  $t = t_-$  での位置座標を  $f_-$  とする. これらの 3 点を通る 2 次関数はひとつに決まり, その結果, 時刻  $t = t_0$  での  $f$  の 1 階微分と 2 階微分はそれぞれ以下のように与えられる.

$$\dot{f}_0 = \frac{1}{(\Delta^+ + \Delta^-)t} \left( \frac{\Delta^- t}{\Delta^+ t} \Delta^+ f + \frac{\Delta^+ t}{\Delta^- t} \Delta^- f \right) \quad (17)$$

$$\ddot{f}_0 = \frac{2}{(\Delta^+ + \Delta^-)t} \left( \frac{\Delta^+ f}{\Delta^+ t} - \frac{\Delta^- f}{\Delta^- t} \right) \quad (18)$$

ここで  $\Delta^+ f = f_+ - f_0$ ,  $\Delta^- f = f_0 - f_-$  を表わし, 特に  $(\Delta^+ + \Delta^-)t = \Delta^+ t + \Delta^- t$  の意味である.

今回使用した軌道データを図 4 に示す<sup>(14)</sup>. この実験では, 3 ローター式新型発射装置で打ち出された卓球ボールの軌道をボールの進行方向正面ならびに真横に設置した高速度ビデオカメラ (1900~2000 fps) で撮影する. 撮影された画像から 20~40 フレーム毎にボールの位置座標を読み取ることで軌道の位置データを求めている. 図 4 では, 無回転 (nospin), トップスピンおよびバックスピンでの軌道の測定結果を示した. 図中のマーカが計測値であり, 時間間隔は  $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$  秒程度である.

図 4 に示した無回転ボールの軌道データから求めた抵抗係数と揚力係数を図 5 と図 6 に示す. これらの図の横軸はボールの位置データから算出した進行速度の瞬間値に基づいたレイノルズ数である. 卓球ボールは発射直後

から徐々に減速していくので、これらの図ではボールの進行にともなって右から左に各係数が変化することになる。また  $n$  は補間に用いたデータ間隔を表わし、 $n = 1$  は隣り合う 3 点、 $n = 2$  は連続した 5 点の両端点と中央点の 3 点による補間の意味である。

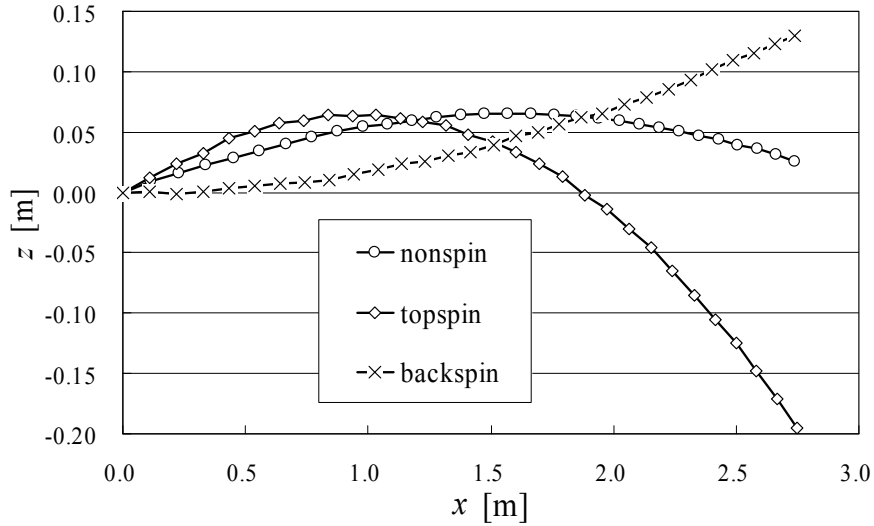


Fig. 4 Measured trajectories of a table tennis ball<sup>(14)</sup>

これらの結果をみると、抵抗および揚力の評価値はともに  $n < 5$  の場合にかなりのばらつきが生じているが、 $n \geq 5$  では不自然なばらつきは見られない。これは今回用いた補間式が計測点を厳密に通るためであり、そのために計測データのノイズの影響が顕著に現れている。また、評価値のばらつきは抵抗係数よりも揚力係数で大きいことも確認できる。

今回求めた抵抗係数の平均値は  $C_D = 0.46$  程度でこれは  $n$  の値にはほとんど依らない。この値は  $Re = 4.0 \times 10^4$  での軌道全体から求めた値である  $C_D = 0.44 \sim 0.45$  に比べると若干小さくなっている<sup>(14)</sup>。一方、揚力係数は  $n$  の値によって大きく異なり  $C_L = 0.002 \sim 0.024$  程度である。特に  $n = 5$  では  $C_L = 0.016$  となり、この値は軌道全体から算出した値  $C_L = 0.02$  と比較的近い<sup>(14)</sup>。

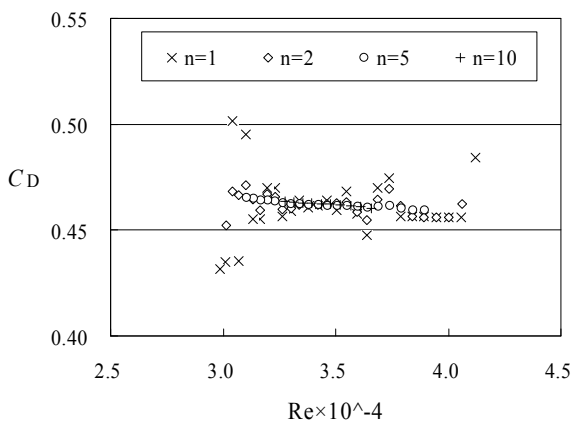


Fig. 5 Estimated drag coefficients (nospin)

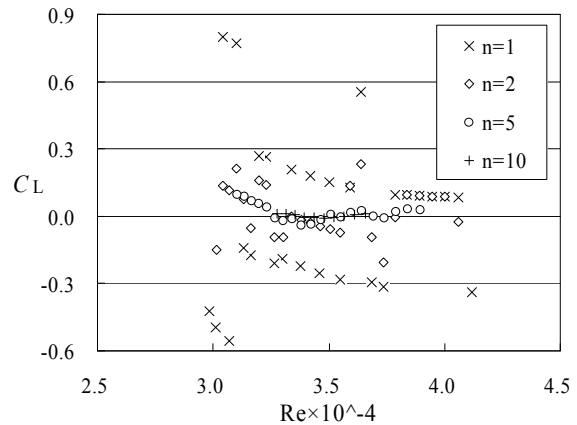


Fig. 6 Estimated lift coefficients (nospin)

ボールのスピンの影響による空力係数の影響を見るために  $n = 5$  の場合の評価値をまとめた結果を図7と図8に示す。図の意味は図5および図6と同じである。これらの結果から、軌道上での空力係数の変化がスピンに大きく依存していることがわかる。特に揚力係数ではスピンによる差異の傾向は明確であり、無回転ではほぼ  $C_L = 0$ 、バックスピンでは  $C_L = 0.3$  程度の正の揚力、トップスピンでは  $C_L = -0.3$  程度の負の揚力が発生している。同様に抵抗係数にもスピンによる影響が生じている。無回転ではすでに述べたように  $C_D = 0.46$  程度でほぼ一定（ないしは微増傾向）である。しかし、スピンによって  $C_D$  はボールの進行とともに減少しており、この傾向はスピンの向きには関係しないようである。

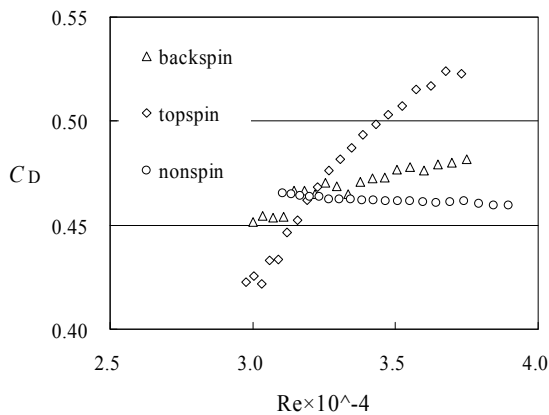


Fig. 7 Comparison of spin effect in drag coefficient

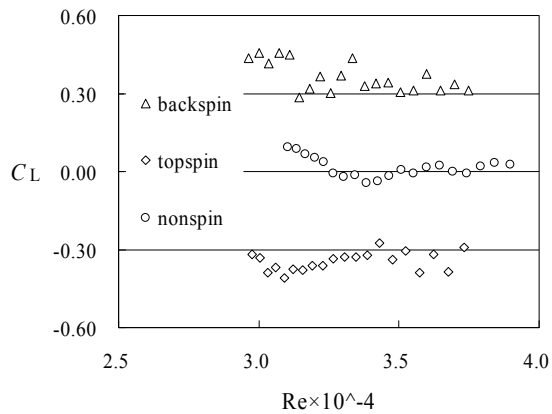


Fig. 8 Comparison of spin effect in lift coefficient

## 5. 結 語

投射体の軌道形状を用いて投射体の空力係数を評価する方法について検討した。ここでは軌道形状の特徴量として、水平方向の最大距離（飛距離）や鉛直方向の最大距離（最大高さ）といった軌道の大域的な形状を表わす量と曲率や振率など軌道の局所的形状を与える量の2種類を考えた。

前者を用いた方法では、まず初速度と初速角および軌道の大域的特徴量である飛距離と最大高さをそれぞれ実測する。計測した初期条件と任意に与えた空力係数に基づいて運動方程式から飛距離と最大高さの数値解を求め、これらと実測値との誤差が最小となる空力係数の組み合わせを探索することで空力係数の軌道全域にわたる平均値を特定する。

この方法によってバックスピンで飛ぶサッカーボールの空力係数を求めた結果、平均値として  $C_D = 0.21$ 、 $C_L = 0.24$ 、 $C_L / C_D = 1.15$  が得られ既存の結果とおおむね一致することを確認した。今回の結果は、サッカーボールなどのように飛翔中の空力特性の変化がそれほど大きくない投射体に対しては飛距離と最大高さ程度の情報からその空力特性が評価できることを示唆している。

他方、後者の量を用いる方法に関しては空気力を含んだ運動方程式に空間曲線論を用いることで空力係数と軌道の局所的特徴量の関係式を導出した。その結果、軌道を区分的に2次関数で近似すれば空力係数が評価できることを示した。そして、卓球ボールの軌道データにこの方法を適用して卓球ボールの空力係数を求めた。その際、補間に用いる位置データの時間間隔が短い場合 ( $\Delta t < 0.03$  秒) に測定データのノイズによる空力係数のばらつきが生じたため、時間間隔を  $\Delta t = 0.03$  秒程度にして空力係数を推定した。

第2の方法は局所的に空力係数を評価できるので、飛翔中の実条件下での空力係数を求めることができる。特に飛翔中の投射体の各瞬間でのレイノルズ数と空力係数の関係を知ることができるので、投射体のもつ空力の非定常な特性を明らかにできる。実際、今回用いた卓球ボールの場合にはレイノルズ数は発射時の  $Re = 4 \times 10^4$  から  $Re = 3 \times 10^4$  程度まで変化したが、このレイノルズ数の変化に対応して空力係数も変化する可能性が示された。今後、位置データに対する空力係数の評価精度を向上させることが重要な課題である。



## 文 献

- (1) Bearman, P. W. and Harvey, J. K., “Golf Ball Aerodynamics”, *Aeronautical Quarterly*, May (1976), pp. 112–122.
- (2) Smits, A. J. and Smith, D. R., “A new aerodynamic model of a golf ball in flight”, *Science and golf II*, (1994), pp. 340–347.
- (3) Robert G. Watts and Ricardo Ferrer, “The lateral force on a spinning sphere: Aerodynamics of a curveball”, *Am. J. Phys.*, Vol. 55, No. 1, January (1987).
- (4) 横山佳之, 宮寄武, 姫野龍太郎, “ジャイロボールのドラッグクライシス”, *ながれ*, Vol. 27 (2008), pp. 403–409.
- (5) 洪, 中山, 坂本, 大島, 永原, 浅井, “サッカーのナックリングシュートに関する基礎研究”, *スポーツ・アンド・ヒューマンダイナミクス 2011 講演論文集 No. 11-17 (2011)*, pp. 17–22.
- (6) 浅井武, 瀬尾和哉, 小林修, “サッカーボールの空力特性に関する研究”, *体育学研究*, Vol. 52, No. 1 (2007), pp. 29–38.
- (7) Lieberman, B. B., “Estimating lift and drag coefficients from golf ball trajectories”, *Science and golf*, (1990), pp. 187–192.
- (8) Leroy W. Alaways and Mont Hubbard, “Experimental determination of baseball spin and lift”, *J. Sports Science*, Vol. 19, (2001), pp. 349–358.
- (9) 山口哲男, 川松英明, “ゴルフボールの軌道シミュレーション”, *シミュレーション*, Vol. 22, No.1 (2003), pp. 21–25.
- (10) 高見圭太, 宮寄武, 姫野龍太郎, “バックスピンする球体に働く負のマグナス力”, *ながれ*, Vol. 28, No. 4 (2009), pp. 347–356.
- (11) 坪井一洋, “抵抗と揚力の働く投射体の最大投射角”, *日本機械学会論文集 (C 編)*, Vol. 78, No. 790 (2012), pp. 1972–1983.
- (12) Nicholas P. Linthorne, “Optimum projection angle for attaining maximum distance in a soccer punt kick”, *Journal of Sports Science and Medicine*, Vol.10 (2011), pp.203–214.
- (13) 本間龍雄, 岡部恒治, “微分幾何とトポロジー入門”, *基礎数学叢書 6*, 新曜社 (1983) 3 章.
- (14) 田中晃平, 福重貴之, 宮寄武, 姫野龍太郎, “卓球ボールの空力特性”, *ながれ*, 投稿中.