

## 柔軟物の超弾性 Ogden 材料モデルのパラメータ同定のための試験法の開発

窪田 陽考<sup>\*1</sup>, プラムディタ ジョナス<sup>\*2</sup>, 田邊 裕治<sup>\*2</sup>, 伊藤 雅人<sup>\*3</sup>, 渡邊 竜司<sup>\*3</sup>

### Development of Test Methods for Parameter Identification of Hyperelastic Ogden Model of Soft Material

Harutaka KUBOTA, Jonas A. PRAMUDITA<sup>\*2</sup>, Yuji TANABE, Masato ITO, Ryoji WATANABE

<sup>\*2</sup> Department of Mechanical and Production Engineering, Faculty of Engineering, Niigata University  
8050, Ikarashi 2-no-cho, Nishi-ku, Niigata 950-2181, Japan

To conduct material characterization of soft material that exhibits large deformation against external load, simple tensile, pure shear and equibiaxial tensile tests are considered necessary to conduct. In this study, a novel method to conduct equibiaxial tensile tests using combinations of a universal testing machine and a special fixture was proposed. Simple tensile, pure shear and equibiaxial tensile tests of a silicone rubber were conducted, and stress-strain curves obtained from the tests were then used to identify the parameters of hyperelastic Ogden model of the silicone rubber. Validation was performed by simulating the three tests using hyperelastic Ogden model in a commercial finite element analysis software with the identified parameters. Simulation results were in good agreement with the test results, indicates that the test and the identified parameters were valid. Comparisons to the results of simulations using parameters identified only by simple tensile test result show that it is important to use results of the three different tests in order to obtain better simulation results.

**Key Words** : Soft Material, Hyperelastic Ogden Model, Equibiaxial Tensile Test, Parameter Identification, Finite Element Analysis.

## 1. 結 言

ゴムやゲルなどの柔軟物は、自動車や住宅からスポーツ用品まで幅広く利用されている。また、人間の体のほとんどは生体軟組織、つまり柔軟物から構成されている。近年のスポーツ工学やバイオメカニクスの発展に伴い、柔軟物に関する力学的研究が盛んに行われるようになり、有限要素法を用いた数値解析が重要な役割を担うこととなってきている<sup>(1)</sup>。

柔軟物の最大の特徴が外力に対して数百%のひずみが生じ、大変形することである。このような超弾性のシミュレーションを行うには、微小変形を前提とした一般的な弾性材料モデルでは困難であると言われている。そこで、超弾性を表現するために、ひずみエネルギー関数を考慮した材料モデルがいくつか提案されており、その中で Ogden 材料モデル<sup>(2)(3)</sup>は優秀な超弾性材料モデルとして注目されている。超弾性材料に Ogden 材料モデルを適用するには、異なる外力条件下における力学的特性を取得し、その試験結果に一致するような材料モデルのパラメータ値を同定する必要がある<sup>(4)(5)</sup>。力学的特性を取得するために、一軸引張（単純引張）試験、一軸拘束一軸引張（純せん断）試験および一様二軸引張試験の三種類の試験が行われるのは一般的である<sup>(5)(6)</sup>。単純引張試験は工学分野において最も一般的な試験であり、万能試験機だけで行うことが可能である。また、一軸拘束一軸引張試験はチャックを工夫することにより万能試験機でも実施が十分可能であると報告されている<sup>(5)</sup>。一方、一様二軸引張試験に関しては、特殊な試験機<sup>(7)</sup>が必要となり、コストが掛かることが知られている。

一様二軸引張試験を容易に実施できるように、万能試験機に取り付け可能な治具が提案されている<sup>(8)</sup>が、超弾

<sup>\*1</sup> 新潟大学大学院自然科学研究科（〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐2の町8050番地）

<sup>\*2</sup> 正員，新潟大学工学部

<sup>\*3</sup> パナソニック株式会社解析センター（〒571-8686 大阪府門真市大字門真1048番地）

E-mail: jpramudita@eng.niigata-u.ac.jp

性材料を対象とせず，ゴム等を大変形させ，破断させることができない．また，試験片が万能試験機や治具に隠れる形の治具が多く<sup>(8)(9)</sup>，試験片の変形挙動の観察が困難であるという問題があった．

そこで，本研究では，万能試験機と組み合わせることにより一様二軸引張試験を容易に実施できる特殊治具を新たに開発し，超弾性材料であるシリコンゴムの単純引張，一軸拘束一軸引張および一様二軸引張試験を行い，試験結果から同定した Ogden 材料モデルによる試験再現シミュレーションを行うことにより三種類の試験の有用性および Ogden 材料モデルの妥当性を明らかにすることを目的とした．

## 2. Ogden 材料モデル

一般的に，超弾性の構成式はひずみエネルギー関数  $W$  を用いて表現されている．ひずみエネルギー関数  $W$  は，式(1)に示すように主軸伸張比  $\lambda$  の関数として表すことができる．

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (1)$$

ここで， $\lambda_i$  は  $i$  軸方向の伸張比である．これについて，Ogden は式(2)に示すようなひずみエネルギー関数  $W$  の構成式を提案し，Ogden 材料モデルとして広く知られている<sup>(3)</sup>．

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{2\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (2)$$

ここで， $\alpha_n$  と  $\mu_n$  は実験結果に対して同定することにより決定される定数である．なお，材料が非圧縮性であると仮定すると，各軸方向の伸張比は，

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (3)$$

と表わされるため，式(3)を式(2)に代入すると，式(4)となる．

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{2\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_1^{-\alpha_n} \lambda_2^{-\alpha_n} - 3) \quad (4)$$

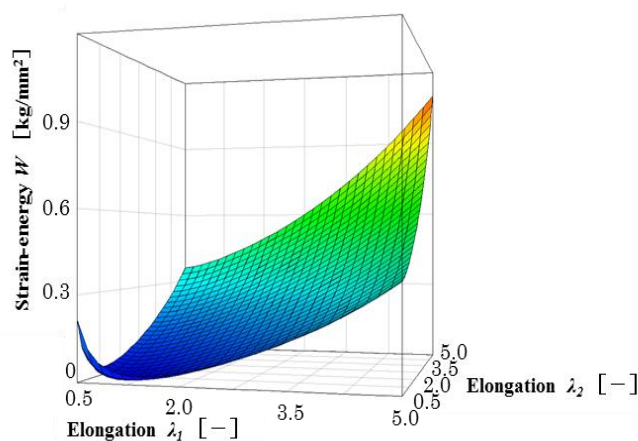


Fig.1 Strain energy function of hyperelastic material<sup>(2)</sup>.

図 1 はゴムのひずみエネルギー関数と伸張比の関係をグラフ化したもの<sup>(3)</sup>である．図に示すように超弾性材料のひずみエネルギー関数と伸張比の関係は二次曲面となっており，Ogden 材料モデルの定数を求めるために条件の異なる複数の試験結果を用いることが適切とされている．

一般的には、図2に示すように単純引張試験（simple tension）に加え、一軸拘束一軸引張試験（pure shear）、一様二軸引張試験（equibiaxial tension）の3種類の材料試験を行えば、曲面上にある3つの異なる曲線を得ることができ、Ogden 材料モデルの定数を精度良く推定できると言われている<sup>(11)</sup>。

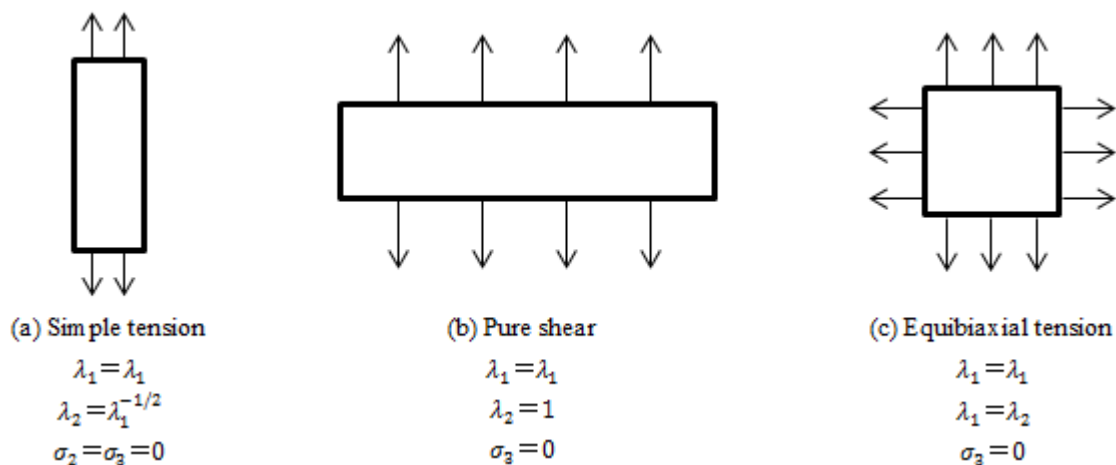


Fig.2 Typical mechanical testing for hyperelastic material.

### 3. 実験方法と結果

#### 3・1 試料および実験装置

本研究で用いた試験片の原材料は、シリコンゴム（KE-12，信越化学工業株式会社）とした。単純引張試験、一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験にそれぞれ異なる形状の試験片を製作した。各試験片の形状および寸法は次節で述べる。試験片を真空成型法により製作し<sup>(10)</sup>、各試験片に油性マーカーによる赤色格子模様およびスプレー噴霧による黒色斑模様のマーキングを施した。なお、試験片数は、各試験にそれぞれ6個ずつとした。

単純引張、一軸拘束一軸引張および一様二軸引張試験をすべてシングルコラム小型卓上試験機（EZ-LX，株式会社島津製作所）で実施した。また、試験片の変形挙動をカメラ（VW-6000，株式会社キーエンス）により撮影した。

#### 3・2 単純引張試験法

単純引張試験（simple tension）はJIS K6251 ダンベル状1号形で定められた試験片を用いて実施した。試験片をしっかりと固定するために、図3(a)に示すパンタグラフ式チャックを用いた。予備負荷として0.1Nを1mm/minで負荷した後、引張速度100mm/minで試験片が破断するまで試験を行った。ひずみを求めるために、実験画像より試験片平行部にある格子の距離の変化を数値化し、計算した。

#### 3・3 一軸拘束一軸引張試験法

一軸拘束一軸引張試験法（pure shear）では、Treloarによる提案した試験法<sup>(6)</sup>を採用した。図3(b)は一軸拘束一軸引張試験に用いた自作のチャックと試験片の固定方法を示すものである。チャック間の距離に対して長辺が十分に長い短冊状試験片を短辺方向に引っ張ることにより、純せん断の応力状態と近い応力状態を擬似的に作り出した。なお、伸張部の寸法が幅150mm、長さ12mm、厚さ2mmになるように試験片を固定した。この試験法では、試験片が伸張している際に、両自由端で試験片中央部方向への変形が生じるが、チャック間の距離と試験片長辺の長さの比が十分に大きければ、自由端部の変形の影響は無視できるとされている<sup>(6)</sup>。ひずみを求めるために、実験画像より試験片の伸張部にある格子の距離の変化を数値化し、計算した。

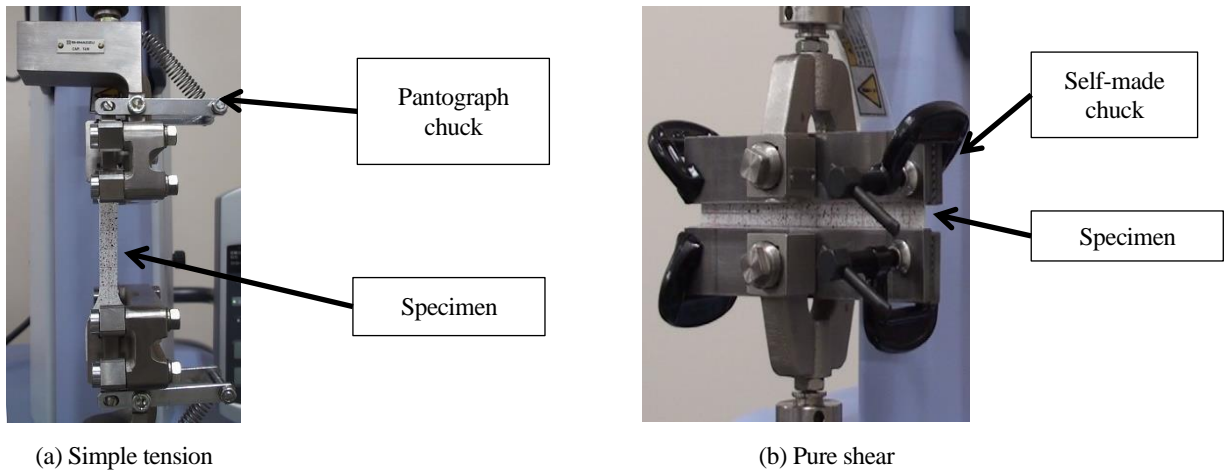


Fig.3 Specimen fixation during simple tension test (a) and pure shear (b)

### 3・4 一様二軸引張試験法

図1に示すように、一様二軸引張試験 (equibiaxial tension) のひずみエネルギー関数 ( $\lambda_1=\lambda_2$ ) が単純引張試験や一軸拘束一軸引張試験と異なる曲線を描き、Ogden 材料モデルの定数を推定するにあたり、非常に重要なデータである。また、非圧縮性の材料においては、一様二軸引張試験は単純圧縮試験に相当するものであると解釈できる。しかしながら、二軸引張試験を行うために、一軸方向のアクチュエータのみをもった万能試験機では不可能であり、特殊な試験機が必要となる。そこで本研究では、万能試験機で一様二軸引張試験を実施できるように、新たな試験治具を開発した。この試験治具はアクチュエータが装備されておらず、万能試験機のクロスヘッドの上下方向の直線運動を機構学的に上下方向と水平方向の等速直線運動に変換する治具である。

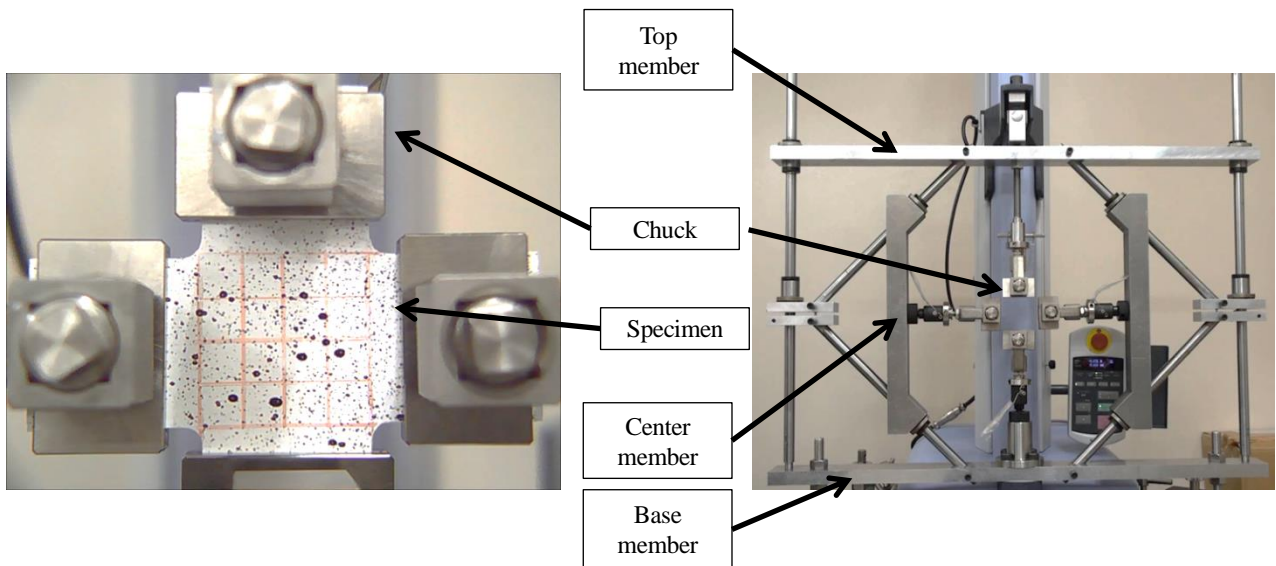


Fig.4 Specimen fixation during equibiaxial tension test.

図4は一様二軸引張試験を実施するために開発した試験治具と試験片の固定方法である。万能試験機のクロスヘッドが上方へ移動すると、クロスヘッドに固定されたトップ部材が同様に移動し、試験機の底部に固定されたベース部材が静止したままである。またその時、垂直に設置された2つの中央部材がクロスヘッド変位量の半分の量で斜め上方向に移動し離れるため、チャックで固定された試験片に一様二軸引張の負荷を与えることができ

る。試験片の形状は、Brieuらの報告<sup>9)</sup>をもとに十字形とした。試験片中央の赤色格子模様は一辺の長さが40mmの正方形エリアの範囲内で描かれており、試験片の角の曲率半径はR5.0である。現段階では、ロードセルが試験治具の外側にあるため、軸受等の振動がノイズとして試験結果に表れるため、バターワースフィルタを用いて試験結果の平滑化を行った。ひずみを求めるために、正方形エリア内の格子の距離の変化を数値化し、算出した。

### 3・5 試験結果および考察

図5にシリコンゴムの単純引張試験、一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験の主軸方向の応力 - ひずみ線図を示す。グラフ中の実線は平均値、破線は標準偏差、マーカーは破断点の平均値を表している。単純引張試験では、他の試験に比べて標準偏差が大きかった。これは異なる製造ロットのシリコンゴムを使用したことが一つの原因であると考えられる。図1に示したひずみエネルギー関数のグラフより、一軸拘束一軸引張が単純引張に近い曲線を描いているため、図5に示すとおり両試験の応力 - ひずみ曲線は似たようなものとなっている。一軸拘束一軸引張試験では、実験画像を解析した結果、試験片自由端部で中央部方向への変形が見られたが、中央部には水平方向への変位が見られなかった。このため、測定値に対する自由端部の変形の影響は小さいものであると考えられる。また、一軸拘束一軸引張試験の破断点が単純引張試験に比べ約半分となっているのは、チャックの挟みによる初期損傷の影響により、破断が早期に発生するためであると考えられる。一様二軸引張試験では、他の試験に比べ応力 - ひずみ曲線の傾きが大きく、図1のひずみエネルギー関数の勾配の傾向に一致している。

本実験は、一様二軸引張>一軸拘束一軸引張>単純引張の結果となっており、ひずみエネルギー関数の観点からシリコンゴムの超弾性特性を評価できたと考えられる。

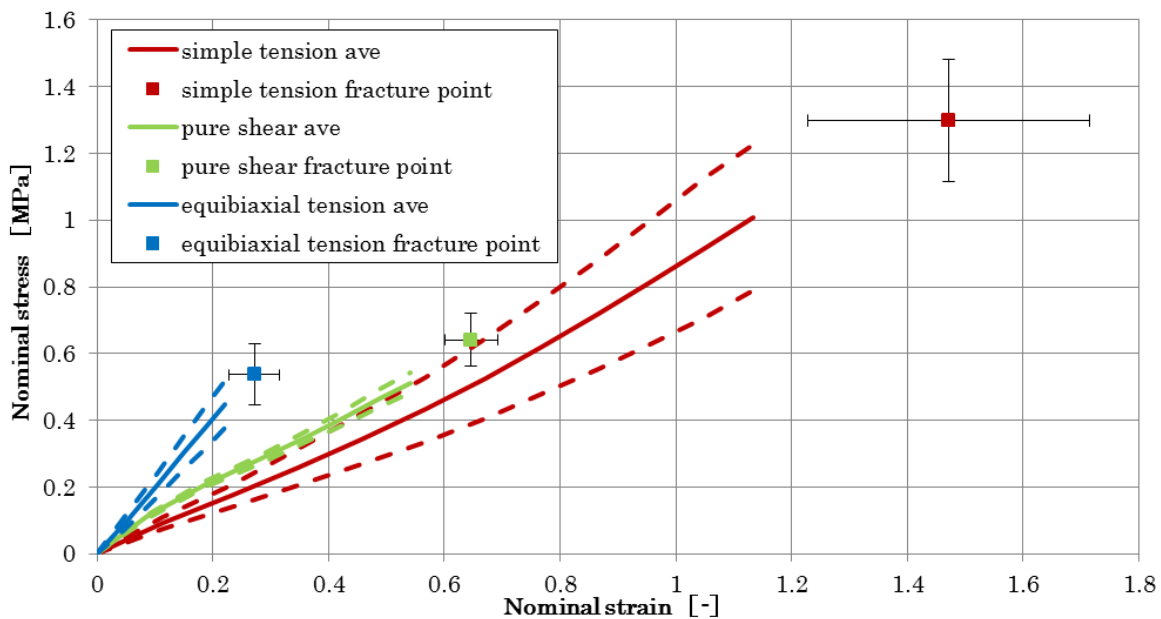


Fig.5 Test results of simple tension, pure shear, and equibiaxial tension.

Table 1 Ogden model parameters estimated from three test results.

$\mu_1$ [MPa]	$\mu_2$ [MPa]	$\mu_3$ [MPa]	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$.055 \times 10^{-15}$	$2.607 \times 10^{-5}$	$-9.639 \times 10^{-5}$	1.858	4.654	-2.355



## 4. 有限要素解析

### 4・1 Ogden 材料モデルのパラメータ同定

前述の単純引張試験，一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験の実験値を用いて，Ogden 材料モデルのパラメータ同定を行った．本研究で使用した有限要素解析ソルバーPAM-CRASH（日本イーエスアイ株式会社）では，ひずみエネルギー関数を考慮した応力 - ひずみ線図のカーブフィッティング機能が備わっている．このカーブフィッティング機能を用いて三つの試験の応力 - ひずみ曲線から drucker stability<sup>(12)</sup>に満たす Ogden 材料モデルの定数を決定した．Ogden 材料モデルは n 次級数であるが，本研究では第三次項まで同定を行った．表 1 に Ogden 材料モデルのパラメータ同定結果を示す．

### 4・2 有限要素モデルの構築と実験再現シミュレーション

Ogden 材料モデルのパラメータの妥当性を確認するために，有限要素法を用いて実験再現シミュレーションを行い，実験結果とシミュレーション結果の比較を行った．図 6 に各試験の試験片の有限要素モデルとその境界条件を示す．各試験に用いた試験片と同様の形状および寸法の有限要素モデルを構築し，図 6 に示すように下位チャックの位置にある節点を拘束し，上位チャックの位置にある節点を 0.1m/sec の上方変位を与えた．なお，一様二軸引張試験のシミュレーションについては，上位チャックに上方変位を与えると同時に，左右チャックの位置にある節点に斜め上方向に変位を与え，実験と同様の荷重条件を再現した．また，各試験片モデルに Ogden 材料モデルを適用し，前節で得られたパラメータを設定した．有限要素解析に PAM-CRASH を用い，解析結果を実験結果と比較した．

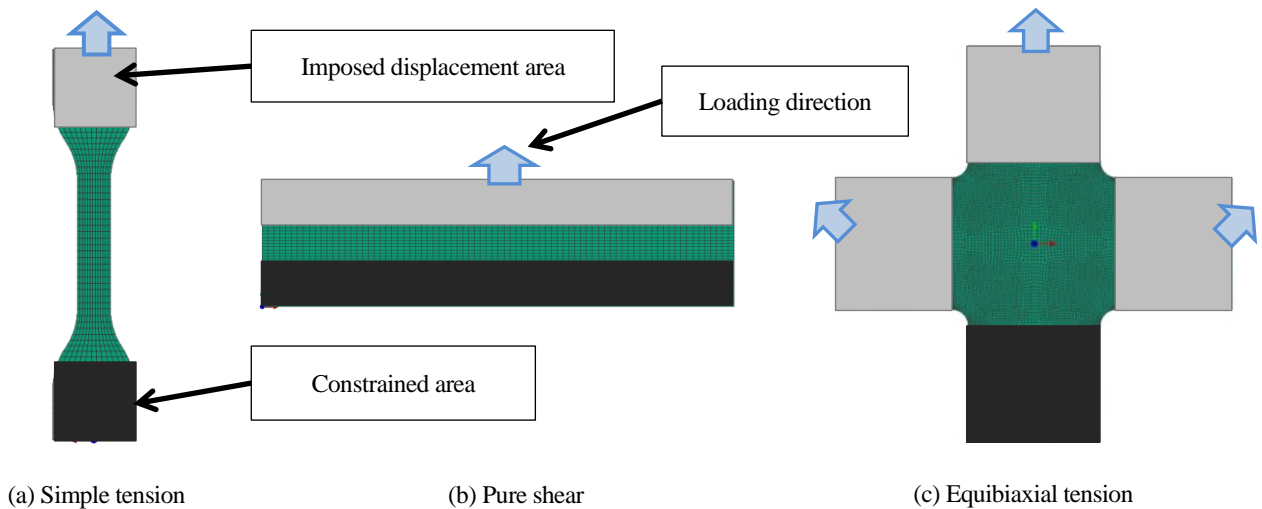


Fig.6 Finite element models of specimens used in three tests and their boundary conditions.

### 4・3 実験結果と有限要素解析結果の比較

有限要素解析によって得られた解析結果と実験結果の比較を図 7 に示す．実験結果より同定した Ogden 材料モデルのパラメータによる解析の結果は，三つとも実験結果とよく一致している．また，一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験の解析結果において，変位量 10mm 付近から曲線の傾きの変化が見られたが，この域の実験結果が存在しないため，解析結果の妥当性が確認できていない．以上より，単純引張試験，一軸拘束一軸引張および一様二軸引張試験の結果をもとに同定した Ogden 材料モデルのパラメータを用いることにより，異なる荷重下における超弾性材料の力学的応答を解析できることが示された．また，本研究では Ogden 材料モデルの第三次項の値までしか同定していなかったが，それでも十分に高い精度の結果を得ることができたと考えられる．

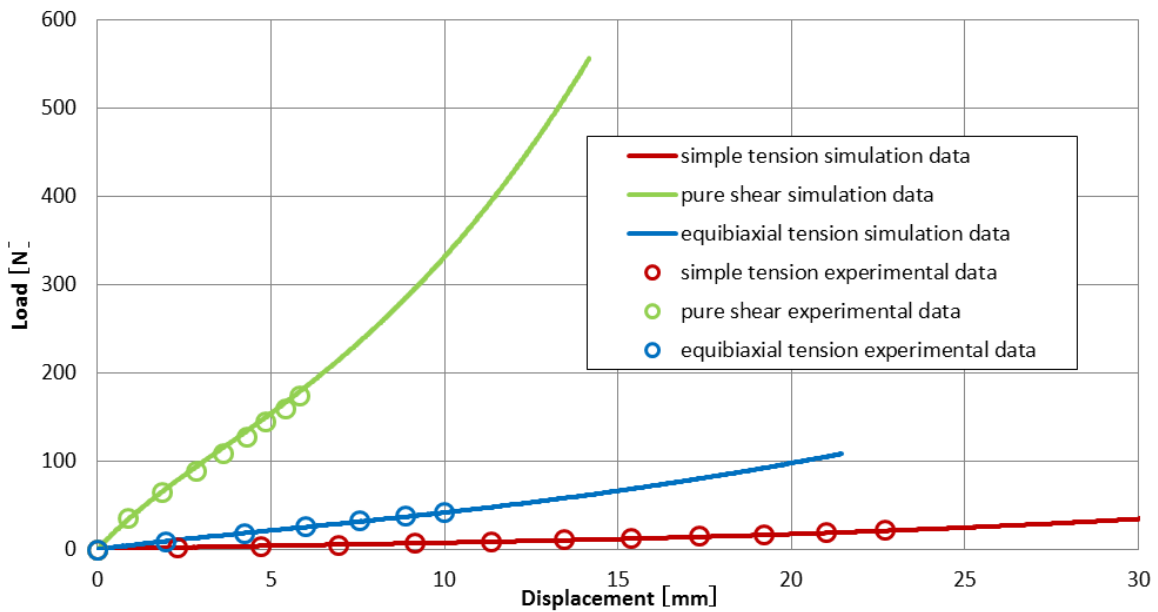


Fig.7 Comparisons of results between experiments and simulations with parameters estimated from three tests.

#### 4・4 単純引張試験結果のみを用いた解析結果

単純引張試験が万能試験機で容易に実施できるため、単純引張試験結果のみをもとに Ogden 材料モデルのパラメータを同定し、超弾性材料の有限要素解析を行うことが少なくない。そこで、単純引張試験結果のみを用いた同定結果による解析を行い、前節で述べた解析結果と比較することにより実験の再現精度の違いを検討した。表 2 に単純引張試験結果のみをもとに同定したパラメータ値を示す。また、図 8 に実験結果、4・3 節で得られた解析値および単純引張試験結果のみによる同定結果 (sto) を用いた解析結果の比較を示す。単純引張については、sto の解析結果が実験結果とよく一致しているが、一軸拘束一軸引張と一様二軸引張については、sto の解析結果が実験結果に比べて高い挙動を示していることがわかった。二次曲面となっているひずみエネルギー関数のパラメータ値を正確に求めるために、一つの試験結果だけでは困難であることが示された。つまり、単純引張試験結果のみによる同定結果を用いた解析は、異なる荷重条件下における超弾性材料の力学的応答を再現できない可能性があることがわかった。さらに、飯塚らは単純引張試験結果のみで Ogden 材料モデルを同定した場合、解析結果が実験結果から大きく外れてしまうと結論づけており<sup>(11)</sup>、本研究の結果を支持している。

Table 2 Ogden model parameters estimated from simple tension test result.

$\mu_1$ [MPa]	$\mu_2$ [MPa]	$\mu_3$ [MPa]	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$1.055 \times 10^{-15}$	$2.607 \times 10^{-5}$	$-9.639 \times 10^{-5}$	1.858	4.654	-2.355

## 5. 結 語

本研究では、柔軟物の超弾性 Ogden 材料モデルのパラメータ同定を容易にできるように、二軸引張試験治具を新たに開発した。そして、万能試験機を用いてシリコンゴムの単純引張試験、一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験を行い、三種類の試験結果をもとに Ogden 材料モデルのパラメータ値を同定し、実験再現シミュレーションによって試験法の有用性および同定結果の妥当性を検証した。実験結果とシミュレーション結果の比較

より、各試験の力学的応答がよく一致しており、試験法の有用性と同定結果の妥当性が確認された。また、単純引張試験結果のみによる同定結果を用いた解析では、シミュレーションが一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験における力学的応答を再現できなかった。以上より、Ogden 材料モデルをより有効に使用するために、単純引張試験、一軸拘束一軸引張試験および一様二軸引張試験のような境界条件の異なる複数の試験結果に基づいたパラメータ同定が必要であると考えられる。

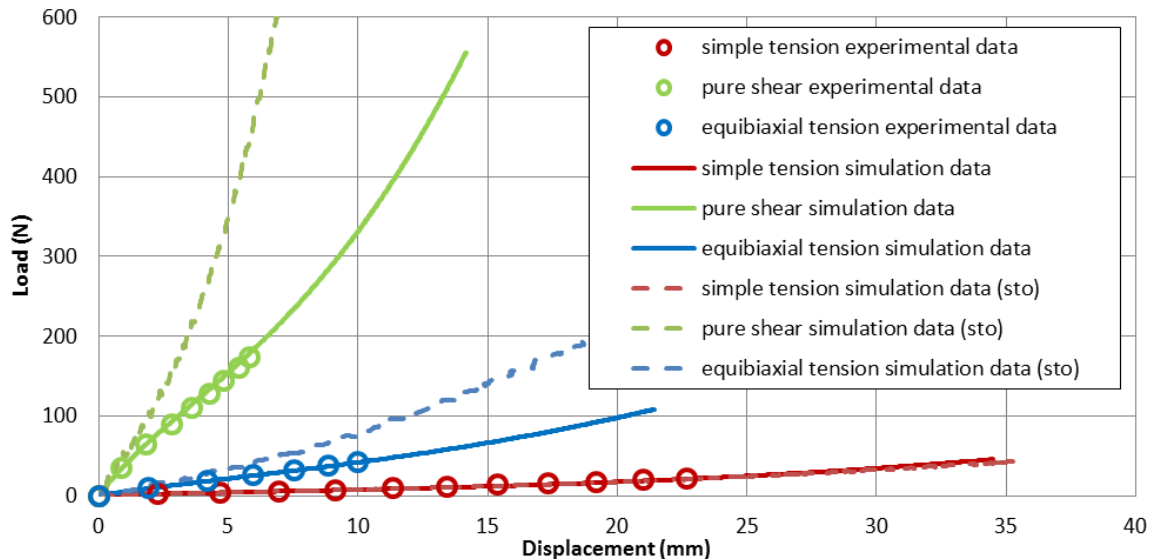


Fig.8 Comparisons of results between experiments and simulations with parameters estimated from simple tension test.

## 文 献

- (1) Groves, R.B., Coulman, S.A., Birchall, J.C., and Evans, S.L., “An anisotropic, hyperelastic model for skin: Experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin”, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol.18 (2013), pp. 167-180.
- (2) Ogden, R.W., “Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubber like solids”, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol. 326 (1972), pp.565-584.
- (3) Ogden, R.W., “Non-linear elastic deformation”, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- (4) Sasso, M., Palmieri, G., Chiappini, G., and Amodio, D., “Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods”, *Polymer Testing*, Vol.27 (2008), pp.995-1004.
- (5) Meunier, L., Chagnon, G., Favier, D., Orgéas, L., and Vacher, P., “Mechanical experimental characterisation and numerical modelling of an unfilled silicone rubber”, *Polymer Testing*, Vol.27 (2008), pp.765-777.
- (6) Treloar, L.R.G., “Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformations”, *Trans. Faraday Soc.*, Vol.29 (1944), pp.59-70.
- (7) 桑原利彦, 池田聡, “十字形試験片を用いた2軸引張試験による冷間圧延鋼板の等塑性仕事面の測定と定式”, *塑性と加工*, No.40 (1999), pp.145-149.
- (8) 永安達哉, 高橋進, “汎用の圧縮試験機を用いたコンパクト二軸引張試験装置の開発と試験結果の評価”, *日本大学生産工学部第42回学術講演会*, No.42 (2009), pp.167-168.
- (9) Brieu, M., et al., “A new biaxial tension test fixture for uniaxial testing machine - A validation for hyperelastic behavior of rubber-like materials”, *Journal of Testing and Evaluation*, Vol.35, No.4 (2007), pp.1-9.
- (10) プラムディタ ジョナス, 清水雄介, 宮内和政, 佐藤房子, 宇治橋貞幸, 伊藤雅人, 渡邊竜司, “曲率をもったエッジとの接触による裂傷の発生条件の解明(皮膚の代替材料を用いたブレード押し込み試験)”, *日本機械学会2012年度年次大会*, 12-1(2012), J021021.



- (11) 飯塚博, 山下義裕, “ゴム材料の力学特性同定と FEM 解析への利用”, *日本ゴム協会誌*, Vol.77 (2004), pp.306-312.
- (12) Ogden, R.W., Saccomandi, G., and Sgura, I., “Fitting hyperelastic models to experimental data”, *Computational Mechanics*, Vol.34 (2004), pp.484-502.