

3次元微細構造を考慮した発泡材料の数値評価手法の開発

篠田 佳克^{*1}, 嶋津 龍弥^{*1}, 松田 昭博^{*2}

Numerical method for evaluating mechanical characteristics of foam materials considering 3-dimensional microscopic structure

Yoshikatsu SHINODA^{*1}, Ryuya SHIMAZU and Akihiro MATSUDA

^{*1} University of Tsukuba, Graduate school of Systems and Information Engineering, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573 Japan

In this study, a homogenization analysis of foam materials to consider the microscopic structure was conducted. This analysis allows the establishment of a design method for porous polymer for sports equipment. A foam material was defined as a material which has a periodical microscopic structure. Deformation of the microscopic structure was uniform, and microscopic periodicity was kept under finite deformation. The polymer matrix was assumed to have incompressible hyperelasticity, which was represented by the Mooney-Rivlin model. An original 3-dimensional simulation program was developed. Uniaxial tensile tests using foam materials were conducted to investigate the effect of porosity on mechanical characteristics. Specimen porosities were 26%, 61%, 66%, and 76%, and pore shape was nearly spherical under microscope observation. The simulation model also had periodic and equally-sized pores. Uniform deformation and periodic boundary condition were applied to the unit cell. The applicability of the proposed method for foam materials was shown by comparing the numerical simulation with the mechanical loading test results.

Key Words : Foam Material, Homogenization Theory, Microscopic Structure, 3-Dimension, Numerical Analysis

1. 緒 言

ポリウレタン発泡材料に代表される軟質発泡材料は、柔軟で緩衝性に優れ、軽いなどの特徴を持つ。また、材料が安価で成形性に富むため、非常に幅広い分野で緩衝材として用いられている。スポーツ分野においても、ランニングシューズのソールやサッカーのシンガード、野球のヘルメットなど様々な競技の用具に用いられており、現在も発泡材料の性能向上を目的とした研究、開発が多くなされている。

緩衝材として用いられるスポーツ用発泡材料の重要な特性として、低ひずみ速度での柔らかさ(フィット性)、想定される応力レベルでのエネルギー吸収量、加工の容易さなどが挙げられる。

近年は健康志向によるランニングブームに代表されるようにアマチュアの人口が増加しており、プロ選手のみならずアマチュアにおいても高品質、高性能なスポーツ用具が求められている。また、スポーツ用具の品質や性能を維持しつつ、生産性を向上させることも重要となる。しかし、現在のスポーツ分野における発泡材料の力学特性の設計は、試作した発泡材料を材料試験で評価するというトライアンドエラーによる手法が多くとられている。これは、発泡材料の力学特性が、母材である高分子材料の特性に加え発泡成形により構成される微細構造の特性を考慮する必要があり、材料の特性評価が複雑なためである。

そこで、発泡材料の力学特性評価のさらなる合理化のため、近年は数値解析を用いた特性評価が導入されている。しかし、発泡材料を均質な材料としてモデル化することが多く、内部の微細構造を考慮したモデル化が必要

^{*1} 学生員, 筑波大学大学院 システム情報工学研究科 構造エネルギー工学専攻 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

^{*2} 正員, 筑波大学 システム情報工学系 構造エネルギー工学科
E-mail: s1220881@u.tsukuba.ac.jp

である。一方で、微細構造を詳細にフルモデリングした解析も行われているが、非常に計算コストがかかるため、計算コストの低減が必要である。

そこで、発泡材料の特性解析に均質化理論を用いることで、内部の微細構造を考慮し、かつ計算コストを抑えた評価を行うことができる。本手法を確立することにより、発泡材料に変形が生じた際の巨視的な力学特性である応力-ひずみ関係に加え、微細構造における変形や応力の把握が可能となるため、発泡材料が使用される状況や想定される衝撃力から最適な高分子材料および微細構造を決定することができる。本研究では、均質化理論を用いた発泡材料の数値評価手法を開発し、微細構造における応力分布の可視化、及び一軸引張試験と数値解析の結果を比較することによって開発した手法の有効性の検証を行った。

2. 均質化理論を用いた数値解析手法の構築

本研究では発泡材料の力学特性を解析するため、図1のように発泡材料を規則的で周期的な微細構造を有する材料と仮定し数値解析を実施した。発泡材料の大変形に対する定式化では、巨視的な座標系 \mathbf{X} と微視的な座標系 \mathbf{Y} を用いて記述した⁽¹⁾⁽²⁾。ここで、 \mathbf{X} は巨視的な座標系で \mathbf{Y} は微視的な座標系である。巨視的な挙動を座標系 \mathbf{X} で記述し、微視的な挙動を座標系 \mathbf{Y} で記述する場合、2つの座標系はスケール比 ε を用いて、以下のように表される⁽³⁾⁽⁴⁾。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} / \varepsilon \quad (1)$$

微細構造のスケールが構造全体のスケールに比べて非常に小さい場合、スケール比 ε は非常に小さい値となる。この時、応力やひずみなどの巨視的な特性は、微細構造の特性の体積平均値として与えられる。また、微細構造は一様に変形し、微細構造の周期性は大変形下でも保たれるとする。

したがって、微細構造の変位 \mathbf{y} は巨視的な変位 \mathbf{Y} と周期的で微視的な変位 \mathbf{w} に分けることが可能となる。

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{Y} + \mathbf{w} \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{F}}$ は巨視的な変形勾配テンソルであり、数値シミュレーションにおいて境界条件として与えられる。微視的な変形勾配は、変位 \mathbf{y} を空間で微分することで得られる。

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{F}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{Y}} \quad (3)$$

変形速度は上式より以下のように得られる。

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{Y} + \dot{\mathbf{w}} \quad (4)$$

すると、巨視的な変形勾配 $\tilde{\mathbf{F}}$ は以下のように表すことが可能で、微視的構造内では一定の値となる。

$$\tilde{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5)$$

また、巨視的な変形勾配 $\tilde{\mathbf{F}}$ は微視的な変形勾配 \mathbf{F} の体積平均値として表せるため次式の関係を満たす。

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_{Y_i} \mathbf{F} dY \quad (6)$$

式(6)を式(3)に代入すると、

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_{Y_0} \mathbf{F} dY = \frac{1}{V} \int_{Y_0} \left(\tilde{\mathbf{F}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial Y} \right) dY = \tilde{\mathbf{F}} + \frac{1}{V} \int_{Y_0} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial Y} dY \quad (7)$$

となるため、次式の関係を満たす必要がある。

$$\frac{1}{V} \int_{Y_0} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial Y} dY = 0 \quad (8)$$

式(8)は \mathbf{w} に周期的な境界条件があることによって満たされる。また、大変形を受ける発泡材料の均質化定式化を行うため、有限変形を考慮し、以下の仮想仕事の原理を用いた。

$$\int \left[\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial f(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C}} \right\} : \delta \mathbf{C} + \left\{ f(\mathbf{J}) - \frac{\partial U_C^\circ(p)}{\partial p} \right\} \delta p \right] dV = \int \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (9)$$

ここで、 \bar{W} は静水圧を含まない超弾性ポテンシャルエネルギー、 \mathbf{C} は変形勾配テンソル \mathbf{F} によって表される右 Cauchy-Green 変形テンソル、 p は静水圧、 $f(\mathbf{J})$ は体積一定の条件として導入される関数、 $U_C^\circ(p)$ は体積ひずみと圧力の関係を表す補ひずみエネルギー、 dV は変形後の体積要素、 dS は変形後の面積要素、 \mathbf{g} は物体力、 \mathbf{t} は表面力を示す。 $\delta \mathbf{C}$ が $\delta \mathbf{u}$ で表され、式(8)が任意の $\delta \mathbf{u}$ と δp に成り立つことから、以下の2式に分離できる。

$$\int \left[\frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial f(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C}} \right\} : \delta \mathbf{C} \right] dV = \int \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (10)$$

$$\int \left[\left\{ f(\mathbf{J}) - \frac{\partial U_C^\circ(p)}{\partial p} \right\} \delta p \right] dV = 0 \quad (11)$$

周期境界条件より式(10)の右辺は0となる。式(10)と式(11)に対して、巨視的および微視的な変位を代入し、微視的な変位と圧力に対する変分をとることで微視的な仮想仕事の原理を導出した。数値解析においては巨視的な変位を既知な量として与え、導出した仮想仕事の原理を満たすように微視的な変位 \mathbf{w} を算出した。

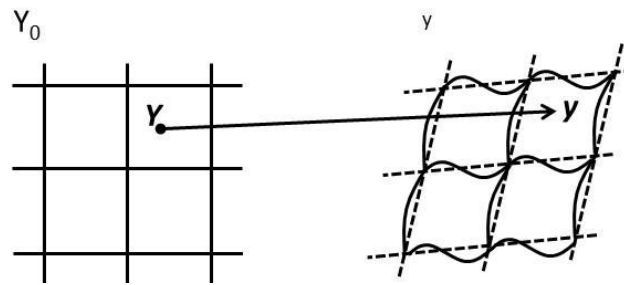


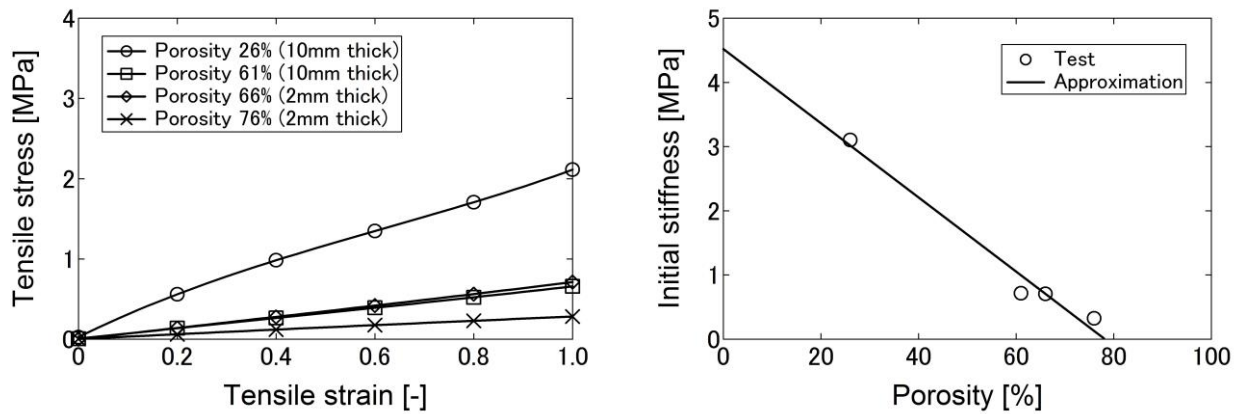
Fig. 1 Periodic deformation of microscopic structures

3. 一軸引張試験

発泡材料の力学特性に対する微細構造の影響を調べるため、発泡材料の空隙率に着目し、母材の高分子材料は同一で空隙率の異なる発泡材料を対象に一軸引張試験を実施した。試験装置は AUTOGRAPH AG-Xplus (株式会社 島津製作所) を用い、試験片は PORON スタンダードハードタイプ H (株式会社 ロジャースイノアック) を用いた。試験片は幅 4mm, 標線間距離 25mm のダンベル形状 (JIS ダンベル状 6 号形) とし、空隙率が 26%, 61%, 66%, 76% のものを用いた。試験は変位制御で行い、変位速度 2mm/min で破断するまで行った。また、マイクロスコープによる試験片の微細構造の観察から、内部の空隙の形状はほぼ球形であることを確認した。

引張試験結果を図 2(a)に示す。図 2(a)より、空隙率が高くなるにつれ剛性が低下していくことが分かる。そこで、発泡材料の初期剛性に着目し、空隙率と初期剛性の関係を示したグラフが図 2(b)である。図 2(b)より、空隙率と初期剛性の間にはおおよそ線形関係があることが分かった。

Gibson ら⁽⁵⁾は、発泡材料の初期剛性は空隙率の 2 次式で表されるという関係を示しているが、本研究の引張試験の結果からは線形的な関係が示された。Gibson らは発泡材料の微細構造を、一定断面を有する弾性梁と平板を用いてモデル化を行っているが、実際の発泡材料は不均一断面の梁や平板で微細構造を構成しているため、引張試験の結果から初期剛性と空隙率の間に線形的な関係が見られたと思われる。



(a) Tensile stress and strain curve

(b) Relationship between the initial stiffness and the porosity

Fig. 2 Tensile loading test results

4. 均質化理論を用いた有限要素解析

4.1 材料モデル

発泡材料の母材の高分子材料を非圧縮性の超弾性体とし、次式に示す Mooney-Rivlin モデル⁽⁶⁾の高次式を用いて高分子材料のモデル化を行った。

$$W(I_1, I_2) = C_{11}(I_1 - 3) + C_{12}(I_1 - 3)^2 + C_{21}(I_2 - 3) \quad (12)$$

ここで W は超弾性のひずみエネルギー密度関数、 I_1 、 I_2 は変形勾配テンソル F によって表される右 Cauchy-Green 変形テンソル C の主不変量、 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{21} は材料定数を表している。 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{21} を変化させることにより、母材の高分子材料の特性を評価することができる。

$$I_1 = C : I \quad (13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ (C : I)^2 - (C \cdot C) : I \} \quad (14)$$

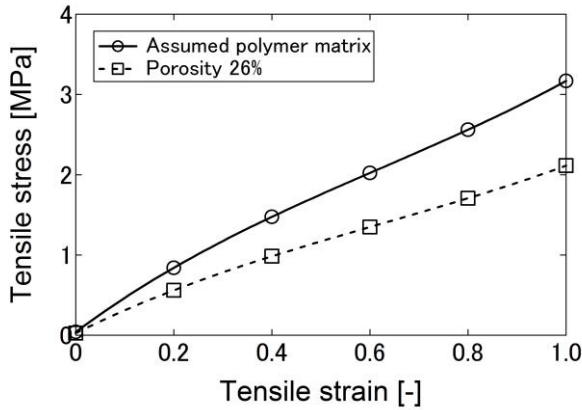
この時、第 2 Piola-Kirchhoff 応力は以下の式で算出される。

$$S = 2 \frac{\partial W(C)}{\partial C} \quad (15)$$

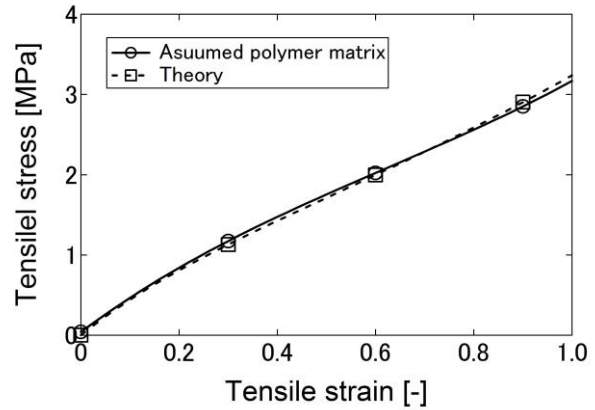
また、図 2(b)の引張試験の結果から空隙率と初期剛性の間にほぼ線形の関係があることがわかった。このとき、空隙率 0%にあたる初期剛性が発泡材料の母材の高分子材料の初期剛性として考えると、高分子材料の初期剛性は空隙率 26%の初期剛性のおよそ 1.5 倍となる。これより、母材の高分子材料の各引張ひずみにおける引張応力を、空隙率が 26%の試験体の各引張ひずみにおける応力の 1.5 倍として算出した。算出された高分子材料の引張応力-引張ひずみ曲線を図 3(a)に示す。

さらに、図 3(b)に示すように、算出された母材の高分子材料の引張特性と理論値が一致するように式(12)の材料定数 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{21} を導出すると、それぞれの値は以下ようになった。

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0.58 \\ C_{12} &= 0.055 \\ C_{21} &= 0.25 \end{aligned} \quad (16)$$



(a) Assumed relationship between tensile stress and strain of polymer matrix



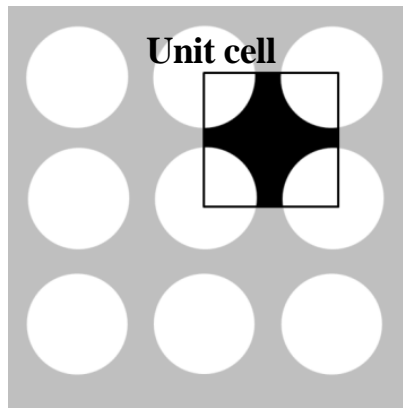
(b) Comparison of theory and assumed poalymer matrix

Fig. 3 Identification of material parameters

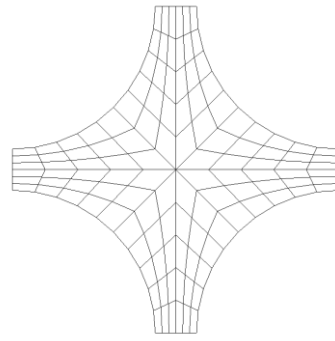
4・2 均質化解析モデル

発泡材料を均等な大きさの空隙を規則的に有する材料として仮定し、均質化解析に用いる 2 次元解析モデルと 3 次元解析モデルを作成した。

発泡材料の 2 次元解析モデルを図 4(a)に示す。図 4(a)の灰色部分が母材の高分子材料で白抜き部分の円孔部分が空隙を示しており、円孔は均一の大きさで上下左右に規則的に整列しているとした。円孔の大きさを与えることにより、任意の空隙率の発泡材料を再現することができる。この解析モデルに均質化理論を適用することで、最終的な解析対象は図 4(b)に示す解析モデルの一部分のユニットセルのみとなる。



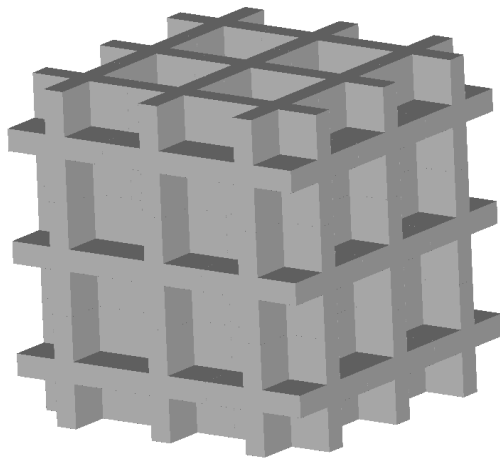
(a) Model of foam material



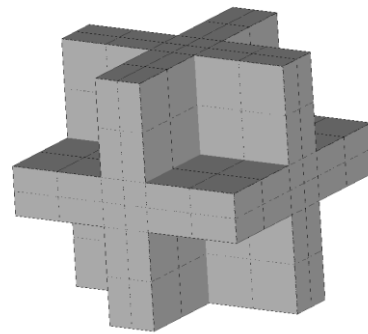
(b) Unit cell for homogenization analysis

Fig. 4 2-dimensional analysis model

次に、発泡材料の3次元解析モデルを図5(a)に示す。図5(a)の灰色の部分に母材の高分子材料を示しており、高分子材料に囲まれた空間が空隙を示している。今回の解析では、モデルの単純化のためGibsonらによって提唱された弾性梁理論に基づく発泡材料のモデルを参考に、図5に示す空隙の形状が立方体である3次元モデルを作成した。空隙は均一の大きさと上下左右奥行き方向に規則的に整列しているとした。このモデルでは、58%、30%、13%、4%の空隙率の発泡材料を再現することができる。2次元解析モデルと同様に3次元解析モデルに均質化理論を適用することで、最終的な解析対象は図5(b)に示す解析モデルの一部分のユニットセルのみとなる。



(a) Model of foam material



(b) Unit cell for homogenization analysis

Fig. 5 3-dimensional analysis model

4・3 解析条件

解析モデル及び境界条件の妥当性を検証するため、図4と図5に示した2次元と3次元のユニットセルに対してマクロで一様な変形を与える数値解析を実施した。2次元ユニットセルに対しては上下左右に、3次元ユニットセルに対しては上下左右奥行き方向にユニットセルが連続的に存在する周期境界条件を適用した。変形条件としてユニットセルに対し材料試験と同じ様な引張変形を与え、変形後の体積が一定となるようにマクロな変形勾配 \mathbf{F} を与えた。2次元解析では変形が平面ひずみ状態となるように式(17)の \mathbf{F}_1 に示すマクロな変形勾配を与え、3次元解析では式(18)の \mathbf{F}_2 に示すマクロな変形勾配を与えた。ここで、式(17)と式(18)の λ は伸びを表している。

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (18)$$

4・4 解析結果と有効性検証

図6に、空隙率が30%と60%の2次元解析モデルに、伸び λ を0.8まで伸長した時の微細構造における平均応力の分布を示す。色が赤いほど高い引張応力が生じており、色が青いほど高い圧縮応力が生じていることを示している。図6より、いずれの空隙率においても空隙に沿うように高い応力が生じており、空隙の周囲で引張応力が生じている部分と圧縮応力が生じている部分が存在することが分かる。また、空隙率60%の解析結果に比べ30%の方が引張応力、圧縮応力共に高く生じている。

図7に、空隙率が30%と58%の3次元解析モデルに、伸び λ を0.8まで伸長した時の微細構造における平均応力の分布を示す。図7より、2次元解析と同様にいずれの空隙率においても空隙に添うようにして高い応力が生じていることが分かる。また、空隙の周囲で引張応力が生じている部分と圧縮応力が生じている部分が存在し、空隙率58%の解析結果に比べ30%の方が高い応力が生じている。

2次元解析及び3次元解析の結果から、開発した手法を用いることにより発泡材料の微細構造における応力集中を可視化することができた。いずれの解析においても空隙率の低い発泡材料の方が高い応力を生じており、微細構造における応力集中に関して空隙率の影響を解析的に把握することができた。また、3次元解析に比べ2次元解析の方が微細構造に生じる応力が高いが、これは2次元解析では平面ひずみ状態を仮定していることにより奥行き方向への変形が生じないように拘束していると考えられるため、奥行き方向に変形することができる3次元解析に比べ2次元解析の方が高い応力が生じていると考えられる。実際の発泡材料では3次元的に変形が可能であることから、3次元解析より得られた結果の方が妥当であると考えられる。

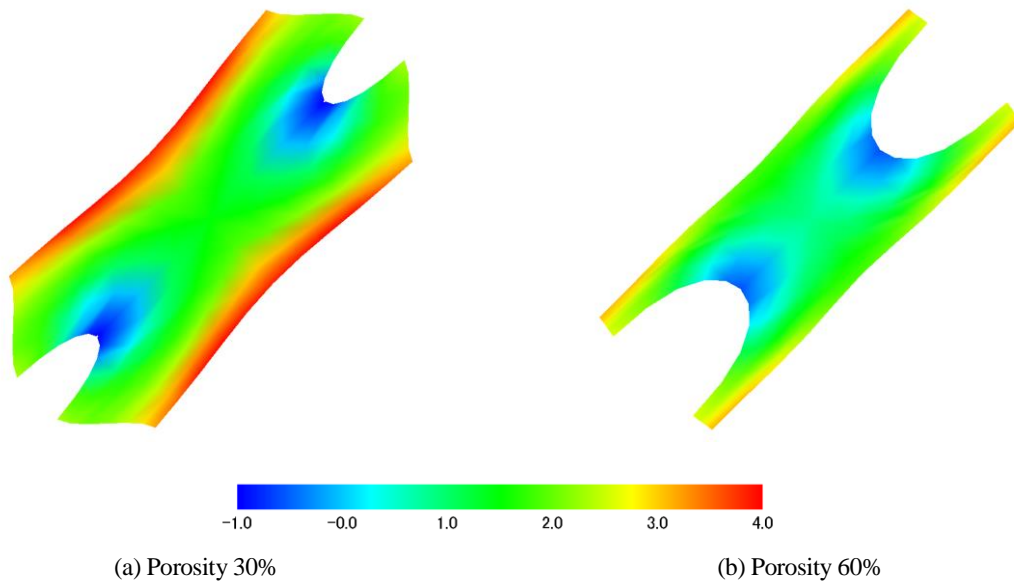


Fig. 6 Stress distribution of 2-dimensional analysis

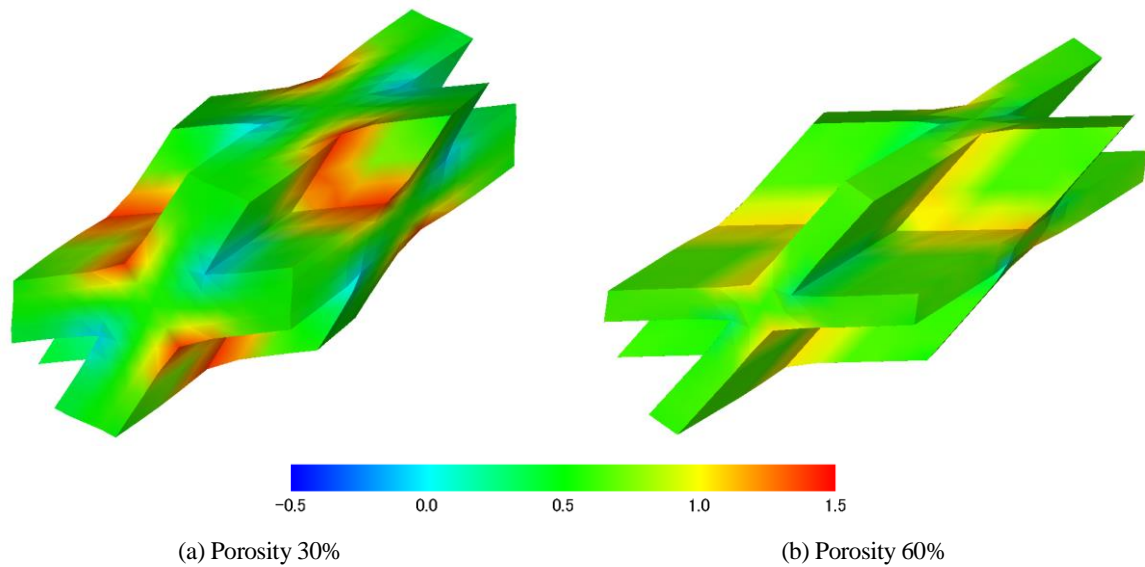


Fig. 7 Stress distribution of 3-dimensional analysis

図 8 に 2 次元解析モデル及び 3 次元解析モデルを用いて空隙率の異なる条件下で均質化解析を行い，得られた応力-ひずみ曲線を示す．図 8(b)において解析結果が途中で終了しているのは，要素の一部に不安定な変形が生じたためである．図 8(a)より，2 次元解析においても引張試験と同様に発泡材料の空隙率が上昇するにつれ剛性が低下する結果が得られた．同様に，図 8(b)より 3 次元解析においても空隙率が上昇するにつれ剛性が低下する結果が得られた．

図 9 に引張試験，2 次元解析及び 3 次元解析より得られた初期剛性と空隙率の関係を示す．引張試験の結果から初期剛性と空隙率の間に線形関係が見られたが，2 次元解析，3 次元解析においても同様に線形関係を示しており，引張試験の傾向と一致している．また，いずれの解析においてもスポーツ用具によく用いられる高空隙領域での引張試験の結果を十分に再現できている．これらの結果より，開発した手法は発泡材料の巨視的な力学特性に対する微細構造の影響を再現できることを確認した．

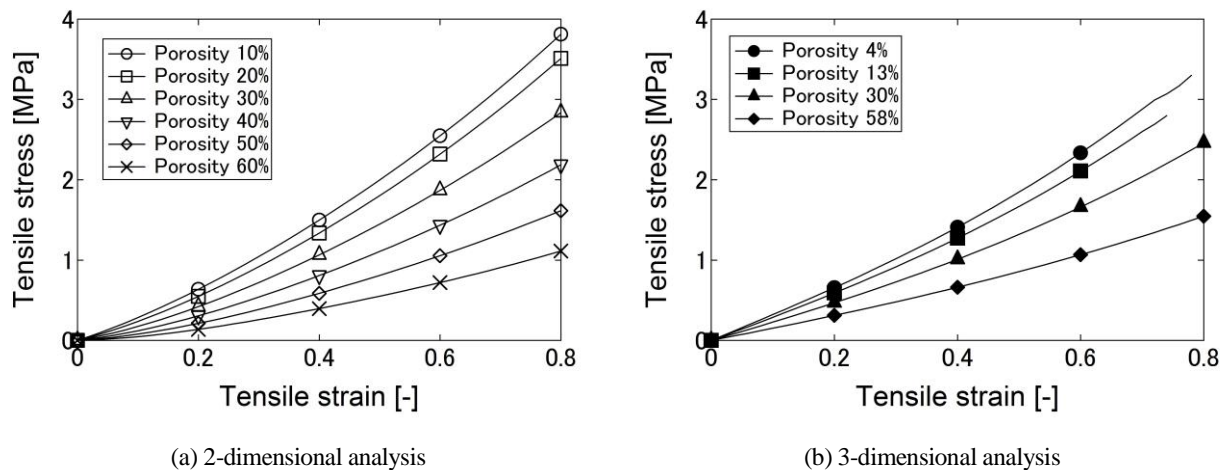


Fig. 8 Stress and strain curve

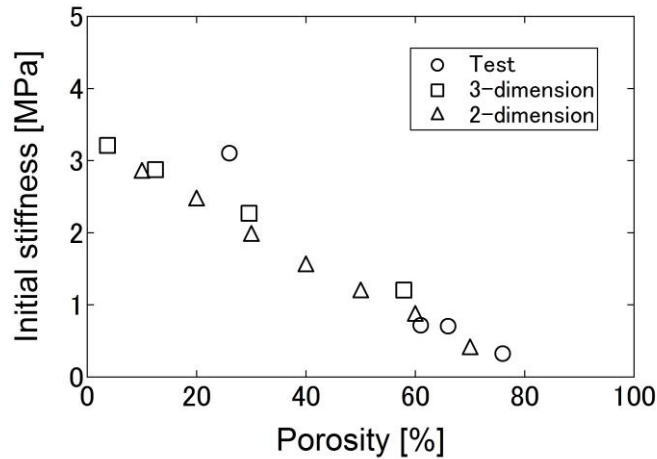


Fig. 9 Relationship between initial stiffness and the porosity

5. 結言

本研究では、3次元の微細構造を考慮した発泡材料の数値解析による力学特性評価手法を開発することを目的として、均質化理論を用いた有限要素解析手法の開発を行った。発泡材料の母材は同一で空隙率の異なる発泡材料を用いて一軸引張試験を行い、空隙率が高くなるにつれ剛性が低下することを確認した。また、初期剛性と空隙率の間に線形関係があることを確認し、空隙率が発泡材料の力学特性に与える影響について把握した。

発泡材料を均一な大きさの空隙を規則的に有する材料とし、均質化理論を用いた有限要素解析を行った。2次元解析モデルと3次元解析モデルを作成し、いずれの解析においても微細構造における応力集中を可視化することができた。また、解析より得られた応力-ひずみ曲線の結果から、引張試験と同様に空隙率が高くなるにつれ剛性が低下していくことを確認した。初期剛性と空隙率の間の線形性や高空隙領域における初期剛性など、開発した手法は引張試験の傾向を十分に再現することができた。

文 献

- (1) Terada, K., Hori, M., Kyoya, T., and Kikuchi, N., "Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 16 (2000), pp. 2285-2311.
- (2) Takano, N., et al, "The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 16 (2000), pp.6517-6535.
- (3) Bouchart, V., et al, "Implementation and numerical verification of a non-linear homogenization method applied to hyperelastic composites", *Computational Materials Science*, Vol. 43, No. 4 (2008), pp. 670-680.
- (4) Terada, K., Saiki, I., Matsui, K., and Yamakawa, Y., "Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 31-32 (2003), pp. 3531-3563
- (5) Lorna, J. Gibson., and Michael, F. Ashby., "Cellular solids -Structure and properties-", Second edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2001).
- (6) Rivlin, R. S., "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. Vol. 241, No. 835 (1948), pp. 379-397.