

ヤコビ行列を用いた静力学による着地動作解析

西川 健^{*1}, 仰木 裕嗣^{*2}, 太田 憲^{*2}

Analysis of Dynamic Landing Motion based on Statics using Jacobian Matrix

Ken NISHIKAWA^{*1}, Yuji OHGI^{*2} and Ken OHTA^{*2}

^{*1} Keio Univ. Grad. School of Media and Governance
Endo 5322, Fujisawa-shi, Kanagawa, 252-0882 Japan

In many sports, it is necessary to exert external forces for generating joint torques which accelerate body. Since there is a strong relation between performance and joint torque generation, inverse dynamics problem (IDP) has been used for joint torque estimation. If external forces are dominant in dynamic equations, dynamic terms can be neglected, which leads to force equilibrium. These equations of force equilibrium express geometric mapping between external force and joint torque with Jacobian matrix in statics. The authors examined validity of the equations as a tool for joint torque estimation in comparison to IDP in landing motion experiment. The results showed estimated ankle and knee torque was comparable to that of IDP. The authors theorized and established the benefit to apply equations of force equilibrium for dynamic motion analysis.

Key Words : Statics, Jacobian Matrix, Force Equilibrium, Joint Torque Estimation, Landing Motion, Inverse Dynamics

1. 緒 言

一般に多くのスポーツでは、動的な動作をとめないながら身体を加速する。このような身体運動の駆動力は筋力であるが、大きな筋力の発揮には足や手など末端に外力が作用する必要がある。したがって、筋力や関節トルクなどの駆動力と外力は密接に関係し、姿勢によってその釣合いは変化する。一般にその駆動力は身体をリンク機構と見なした逆動力学問題によって推定される。逆動力学解析では加速度や角加速度などの運動学データを必要とし、画像解析などによって位置データから計算を行う場合、数値微分演算にともなうノイズの増大などによる精度や計算負荷が問題となる。近年ではモーションキャプチャによる計測精度の向上や、計算能力の向上によって比較的容易に駆動力を計算することができるが、その駆動力と身体に作用する外力との関係は、そのような複雑な計算を通さないと得ることができない。また、姿勢によって力の釣合いは変化するのに対し、逆動力学解析からは姿勢変化による駆動力と外力の関係を容易に議論することができない。

ところが、着地動作などの動的な運動であっても身体に大きな外力が発揮される場合、特に回転の運動方程式における動的項は外力と比較して小さいことが分かっている⁽¹⁾。そこで本研究では、外力と駆動力との関係を表す、ヤコビ行列を用いた力の釣合い式を導き出し、特に着地動作にともなう下肢に作用する関節トルクと床反力との幾何学的な関係を示す。これにより、床反力と姿勢から危険な関節トルクが作用する姿勢や、最適な足に作用する力や速度を発揮するための最適な姿勢などを議論することが容易になり、複雑な逆動力学計算を行わずとも、幾何学的な議論を行うことが可能となる。

^{*1} 学生員, 慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科 (〒252-0882 神奈川県藤沢市遠藤 5322)

^{*2} 正員, 慶應義塾大学 政策・メディア研究科

E-mail: kenn@sfc.keio.ac.jp

2. 下肢の3次元モデル

図1に支持脚における股関節以下の3次元3リンクモデルを示し、図2に足部の詳細な3次元モデルを示す。本モデルは支持脚接地時における動作の解析を目的とし、足底が床に接地している状態を示す。ここで、絶対座標系は x 軸と y 軸が水平面に固定され、 z 軸は鉛直上向きとする。リンク1、リンク2、リンク3はそれぞれ大腿、下腿、足部を示し、リンク1とリンク2の長さを l_1, l_2 とする。また $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ はそれぞれ股関節、膝関節、足関節、圧力中心(COP)の位置ベクトルを示し、 $\mathbf{x}_{g1}, \mathbf{x}_{g2}, \mathbf{x}_{g3}$ は各リンクの重心の位置ベクトルを示す。各リンク近位側の関節から重心位置の長さを l_{g1}, l_{g2}, l_{g3} とし、リンク3の重心位置 \mathbf{x}_{g3} からCOP位置 \mathbf{x}_4 の長さを l_{g4} 、足関節位置 \mathbf{x}_3 からCOP位置 \mathbf{x}_4 の長さを l_3 とする。また各リンクの近位側の関節位置から各重心位置へ向かう長軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_{y1}, \mathbf{e}_{y2}, \mathbf{e}_{y3}$ とし、リンク3の足関節からCOPの位置へ向かう単位ベクトルと、重心位置からCOP位置へ向かう単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{g3}$ とする。 m_1, m_2, m_3 は各リンクの質量、 I_1, I_2, I_3 は各リンクの重心周りの慣性テンソルを示し、各リンクの角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ とする。リンク1に対し \mathbf{x}_1 において作用する関節間力ベクトルと関節トルクベクトルを $\mathbf{F}_1, \boldsymbol{\tau}_1$ とし、同様にリンク2と3に対して作用する各力とトルクを $\mathbf{F}_2, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{F}_3, \boldsymbol{\tau}_3$ 、リンク3に対し \mathbf{x}_4 において作用する床反力ベクトルと足底と床の摩擦抵抗による自由モーメントを $\mathbf{F}_g, \boldsymbol{\tau}_z$ とする。また自由モーメント $\boldsymbol{\tau}_z$ は鉛直軸周りに作用し $\boldsymbol{\tau}_z = [0 \ 0 \ \tau_z]^T$ となる。重力加速度ベクトルを \mathbf{g} とし $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ となり、 g は重力加速度を示す。股関節は並進と回転の6自由度を有し、3次元空間を自由に動く。また膝関節と足関節はそれぞれ回転の3自由度を有する。ここで、COPの位置ベクトル \mathbf{x}_4 とその速度 $\dot{\mathbf{x}}_4$ は

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_1 + l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_3 \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \dot{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times l_1 \mathbf{e}_{y1} + \boldsymbol{\omega}_2 \times l_2 \mathbf{e}_{y2} + \boldsymbol{\omega}_3 \times l_3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

と表される。

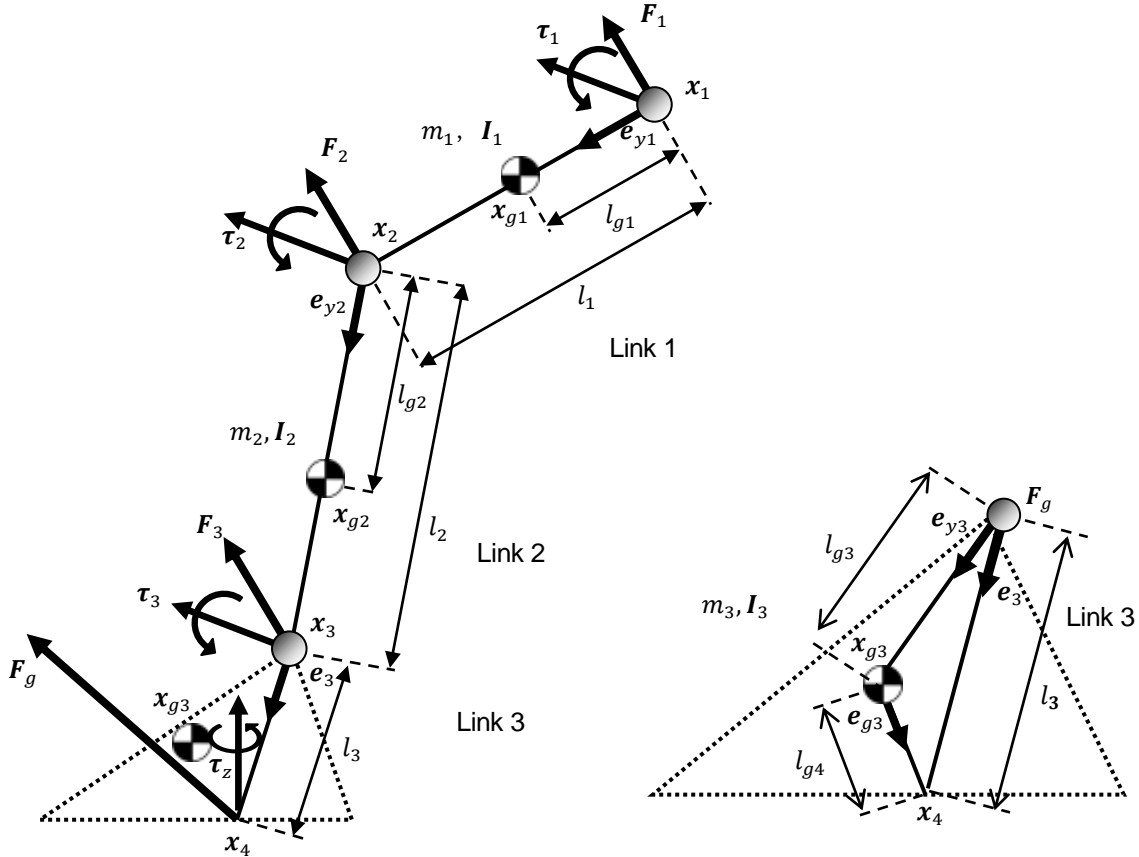


Fig. 1 Three-dimensional model of support leg consists of thigh, shank and foot

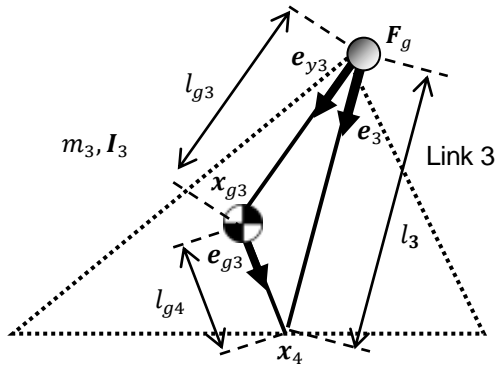


Fig. 2 Three-dimensional model of foot with variables related to foot center of mass

2・1 下肢のダイナミクス

ここで、ニュートン・オイラー法を用いてシステムのダイナミクスを示す。各リンクのニュートンの運動方程式は

$$m_1(\ddot{\mathbf{x}}_{g1} - \mathbf{g}) = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \quad (3)$$

$$m_2(\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g}) = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 \quad (4)$$

$$m_3(\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) = \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_g \quad (5)$$

と表わされ、各リンクのオイラーの運動方程式は

$$\hat{\mathbf{M}}_1 = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2 - l_{g1}\mathbf{e}_{y1} \times \mathbf{F}_1 + (l_1 - l_{g1})\mathbf{e}_{y1} \times (-\mathbf{F}_2) \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_2 = \boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_3 - l_{g2}\mathbf{e}_{y2} \times \mathbf{F}_2 + (l_2 - l_{g2})\mathbf{e}_{y2} \times (-\mathbf{F}_3) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_3 = \boldsymbol{\tau}_3 + \boldsymbol{\tau}_z - l_{g3}\mathbf{e}_{y3} \times \mathbf{F}_3 + l_{g4}\mathbf{e}_{g3} \times \mathbf{F}_g \quad (8)$$

と表される。ここで、各ニュートンとオイラーの運動方程式の左辺を動的項、右辺を外力項と呼び、オイラーの運動方程式の動的項を

$$\hat{\mathbf{M}}_1 \equiv I_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (I_1\boldsymbol{\omega}_1) \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_2 \equiv I_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (I_2\boldsymbol{\omega}_2) \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_3 \equiv I_3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times (I_3\boldsymbol{\omega}_3) \quad (11)$$

と定義した。

2・2 ヤコビ行列の導出

ここで、COP の速度ベクトル $\dot{\mathbf{x}}_4$ とリンク 3 の床に対する相対角速度のベクトル $\dot{\mathbf{q}}_4$ から構成される COP の速度・角速度ベクトルを $\mathbf{V} \equiv [\dot{\mathbf{x}}_4 \quad \dot{\mathbf{q}}_4]^T$ と定義し、一般化速度 $\boldsymbol{\Omega} \equiv [\dot{\mathbf{x}}_1 \quad \dot{\mathbf{q}}_1 \quad \dot{\mathbf{q}}_2 \quad \dot{\mathbf{q}}_3]^T$ との関係を示すヤコビ行列を導出する。ここで、各関節の相対角速度ベクトル $\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2, \dot{\mathbf{q}}_3$ とリンク 3 の床に対する相対角速度 $\dot{\mathbf{q}}_4$ を $\dot{\mathbf{q}}_1 \equiv \boldsymbol{\omega}_1$, $\dot{\mathbf{q}}_2 \equiv \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$, $\dot{\mathbf{q}}_3 \equiv \boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_2$, $\dot{\mathbf{q}}_4 \equiv \boldsymbol{\omega}_3$ と定義し、COP の速度 $\dot{\mathbf{x}}_4$ と床に対するリンク 3 の相対角速度 $\dot{\mathbf{q}}_4$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_4 &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_1 \times l_1\mathbf{e}_{y1} + (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2) \times l_2\mathbf{e}_{y2} + (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_3) \times l_3\mathbf{e}_3 \\ &= \dot{\mathbf{x}}_1 - l_1\mathbf{e}_{y1} \times \dot{\mathbf{q}}_1 - l_2\mathbf{e}_{y2} \times (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2) - l_3\mathbf{e}_3 \times (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_3) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_4 = \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (13)$$

を得る。ここで、簡単のために各リンクにおける近位側から遠位側へのベクトルを $\mathbf{l}_1 \equiv l_1\mathbf{e}_{y1}$, $\mathbf{l}_2 \equiv l_2\mathbf{e}_{y2}$, $\mathbf{l}_3 \equiv l_3\mathbf{e}_3$, と定義し、さらに、股関節、膝関節、足関節、から COP までの各位置ベクトルを $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3$, $\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3$, $\mathbf{L}_3 \equiv \mathbf{l}_3$ と定義する。また、ベクトル $\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ の外積演算 $[\mathbf{a} \times]$ を下記のように歪対称行列

$$\tilde{\mathbf{a}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{a} \times] \quad (14)$$

を用いて定義すると、COP の速度 $\dot{\mathbf{x}}_4$ は、

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{l}_1 \times \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{l}_2 \times (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2) - \mathbf{l}_3 \times (\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 + \dot{\mathbf{q}}_3)$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{L}_1 \times \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{L}_2 \times \dot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{L}_3 \times \dot{\mathbf{q}}_3 = \dot{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\mathbf{L}}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{L}}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - \tilde{\mathbf{L}}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (15)$$

のように書き換えられる．ここで，一般化速度 $\boldsymbol{\Omega}$ と速度ベクトル \mathbf{V} の関係を示すヤコビ行列

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \vdots & -\tilde{\mathbf{L}}_1 & \vdots & -\tilde{\mathbf{L}}_2 & \vdots & -\tilde{\mathbf{L}}_3 \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{E} & \vdots & \mathbf{E} & \vdots & \mathbf{E} \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{J}_0 \quad \mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3] \quad (16)$$

を導入すると，速度ベクトル \mathbf{V} は

$$\mathbf{V} = \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \quad (17)$$

となる．ここで， \mathbf{E} は3次の単位行列， $\mathbf{0}$ は零行列とした．行列 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ は各関節と COP の関係を示すヤコビ行列となり，歪対称行列 $\tilde{\mathbf{L}}_1, \tilde{\mathbf{L}}_2, \tilde{\mathbf{L}}_3$ は各々股関節から COP，膝関節から COP，足関節から COP へ向かうモーメントアームの外積演算を意味する．

2・3 力の釣合い式の導出

本節では仮想仕事の原理に基づき，ヤコビ行列を介した床反力と各関節トルクとの関係を示す．ここで，COP に作用する床反力と自由モーメントのベクトルを $\mathbf{f} \equiv [\mathbf{F}_g \quad \boldsymbol{\tau}_z]^T$ とする．また，各リンクの微小変位を $\delta\boldsymbol{\theta}_1, \delta\boldsymbol{\theta}_2, \delta\boldsymbol{\theta}_3$ とし，それらの相対角度の微小変位を $\delta\mathbf{q}_1, \delta\mathbf{q}_2, \delta\mathbf{q}_3$ とすると， $\delta\mathbf{q}_1 = \delta\boldsymbol{\theta}_1$ ， $\delta\mathbf{q}_2 = \delta\boldsymbol{\theta}_2 - \delta\boldsymbol{\theta}_1$ ， $\delta\mathbf{q}_3 = \delta\boldsymbol{\theta}_3 - \delta\boldsymbol{\theta}_2$ を得る．股関節位置と COP の位置の微小変位をそれぞれ $\delta\mathbf{x}_1, \delta\mathbf{x}_4$ とし，静的平衡状態で各微小変位に仕事を及ぼす一般化力を $\bar{\mathbf{T}}$ とすると，仮想仕事の原理より

$$\bar{\mathbf{T}}^T \delta\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{f}^T \delta\mathbf{V} = (\bar{\mathbf{T}}^T + \mathbf{f}^T \mathbf{J})^T \delta\boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (18)$$

を経て，力の釣合い式

$$\bar{\mathbf{T}} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (19)$$

を得る．ここで，ヤコビ行列 \mathbf{J} は歪対称行列 $\tilde{\mathbf{L}}_1, \tilde{\mathbf{L}}_2, \tilde{\mathbf{L}}_3$ を含んでいることから，各関節位置から COP 位置へ向かうベクトルをモーメントアームとした外積演算によって，COP に作用する外力 \mathbf{f} を関節空間の力 $\bar{\mathbf{T}}$ に座標変換する役割を果たす．

2・4 逆動力学と力の釣合い式

ここで，ヤコビ行列により表した力の釣合い式(19)がニュートン・オイラーの運動方程式の中でどのような役割を果たすか示す．ここで，各ニュートンの運動方程式(3)～(5)を各々加算し，全てのリンクの和の，リンク 2 とリンク 3 の和の，そしてリンク 3 単独の，並進ダイナミクス

$$\mathbf{F}_1 = m_1(\ddot{\mathbf{x}}_{g1} - \mathbf{g}) + m_2(\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g}) + m_3(\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) - \mathbf{F}_g \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2(\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g}) + m_3(\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) - \mathbf{F}_g \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_3 = m_3(\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) - \mathbf{F}_g \quad (22)$$

に書き換え，各関節間力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ と床反力 \mathbf{F}_g との関係を得る．同様に各オイラーの運動方程式(6)～(8)を用いて，全てのリンクの和の，リンク 2 とリンク 3 の和の，そしてリンク 3 単独の，回転ダイナミクスを導出し，それらに各関節間力(20)～(22)を代入すると

$$\hat{\mathbf{M}}_1 + \hat{\mathbf{M}}_2 + \hat{\mathbf{M}}_3 + (l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_{g3} \mathbf{e}_{y3}) \times m_3(\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) +$$

$$(l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_{g2} \mathbf{e}_{y2}) \times m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g}) + l_{g1} \mathbf{e}_{y1} \times m_1 (\ddot{\mathbf{x}}_{g1} - \mathbf{g}) = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_z + (l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{F}_g \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_2 + \hat{\mathbf{M}}_3 + (l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_{g3} \mathbf{e}_{y3}) \times m_3 (\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) + l_{g2} \mathbf{e}_{y2} \times m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g}) = \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_z + (l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{F}_g \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_3 + l_{g3} \mathbf{e}_{y3} \times m_3 (\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g}) = \boldsymbol{\tau}_3 + \boldsymbol{\tau}_z + (l_{g3} \mathbf{e}_{y3} + l_{g4} \mathbf{e}_{g3}) \times \mathbf{F}_g = \boldsymbol{\tau}_3 + \boldsymbol{\tau}_z + l_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F}_g \quad (25)$$

を得る. 以上の操作により, 式(3)~(8)のダイナミクスは加算することによって, ニュートン・オイラー法では逐次的に算出される各関節間力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ が相殺され, 式(23)~(25)の3つの運動方程式にまとめられる. 次に, $\mathbf{T} = [\mathbf{F}_1 \quad \boldsymbol{\tau}_1 \quad \boldsymbol{\tau}_2 \quad \boldsymbol{\tau}_3]^T$ と定義し, 式(23)~(25)に式(20)を加えて書き直すと, システムの新しいダイナミクス

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{g1} + \boldsymbol{\varphi}_{g2} + \boldsymbol{\varphi}_{g3} \\ \hat{\mathbf{M}}_1 + \hat{\mathbf{M}}_2 + \hat{\mathbf{M}}_3 + \tilde{\mathbf{r}}_{13} \boldsymbol{\varphi}_{g3} + \tilde{\mathbf{r}}_{12} \boldsymbol{\varphi}_{g2} + \tilde{\mathbf{r}}_{11} \boldsymbol{\varphi}_{g1} \\ \hat{\mathbf{M}}_2 + \hat{\mathbf{M}}_3 + \tilde{\mathbf{r}}_{23} \boldsymbol{\varphi}_{g3} + \tilde{\mathbf{r}}_{22} \boldsymbol{\varphi}_{g2} \\ \hat{\mathbf{M}}_3 + \tilde{\mathbf{r}}_{33} \boldsymbol{\varphi}_{g3} \end{bmatrix} = \mathbf{T} + \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (26)$$

を得る. ここで, $\mathbf{r}_{13} \equiv l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_{g3} \mathbf{e}_{y3}$, $\mathbf{r}_{12} \equiv l_1 \mathbf{e}_{y1} + l_{g2} \mathbf{e}_{y2}$, $\mathbf{r}_{11} \equiv l_{g1} \mathbf{e}_{y1}$, $\mathbf{r}_{23} \equiv l_2 \mathbf{e}_{y2} + l_{g3} \mathbf{e}_{y3}$, $\mathbf{r}_{22} \equiv l_{g2} \mathbf{e}_{y2}$, $\mathbf{r}_{33} \equiv l_{g3} \mathbf{e}_{y3}$, $\boldsymbol{\varphi}_{g1} \equiv m_1 (\ddot{\mathbf{x}}_{g1} - \mathbf{g})$, $\boldsymbol{\varphi}_{g2} \equiv m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_{g2} - \mathbf{g})$, $\boldsymbol{\varphi}_{g3} \equiv m_3 (\ddot{\mathbf{x}}_{g3} - \mathbf{g})$ と定義した. ここで, 図3に示すように, 各ベクトル \mathbf{r} の下付き文字は各関節位置と重心位置を結ぶ位置ベクトルであることを表し, 例えば, \mathbf{r}_{13} は股関節位置 \mathbf{x}_1 からリンク3の重心位置へ向かう位置ベクトルを示す. また, $\boldsymbol{\varphi}_{g1}, \boldsymbol{\varphi}_{g2}, \boldsymbol{\varphi}_{g3}$ はニュートンの運動方程式の動的項を示しており, 定義より各リンクに作用する力の総和を表す. 例えば $\tilde{\mathbf{r}}_{13} \boldsymbol{\varphi}_{g3}$ は $\tilde{\mathbf{r}}_{13}$ によって表されるモーメントアームにより $\boldsymbol{\varphi}_{g3}$ が股関節トルクに分配されていることを示している. よって, 式(26)の右辺は式(19)の力の釣合い式となり, 逆動力学問題の中における力の釣合い式の関係を顕在化した.

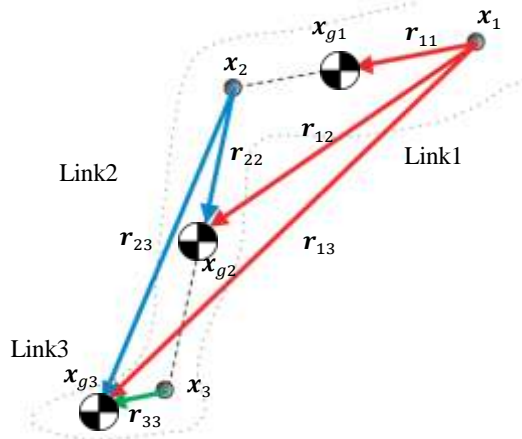


Fig. 3 Position vectors from proximal joints to center of mass of distal links

2・5 静力学近似

ニュートン・オイラーの運動方程式を変形してダイナミクス(26)が得られた. このダイナミクスにおける左辺の動的項が右辺の外力項と比較して小さい場合に近似が可能となり, 近似により推定された股関節間力と各関節トルクによるベクトルを $\hat{\mathbf{T}} \equiv [\hat{\mathbf{F}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_2 \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_3]^T$ と定義すると力の釣合い式

$$\hat{\mathbf{T}} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (27)$$

を得る. そこで, 次節では各動的項と外力項を比較し, 実際の運動でこの近似がどの程度成り立つか検討する.

3. 実験データによる検証

ここで, サッカーのキック動作における支持脚の実験データより, ダイナミクス(26)の各動的項と, 逆動力学計算と力の釣合い式により推定した各関節トルクを比較して, 静力学近似の検証を行う.

3・1 実験方法

図4に実験の概要図を示す。本研究は、サッカーのキック動作における支持脚の着地動作を対象として検証した。右利きのサッカー経験者1名がフットサル用シューズを装着し、約3mの助走後にキック動作を10試技行った。支持脚である左足に作用する床反力を床反力計(9281C, Kistler社製)を使用し、サンプリング周波数500Hzで計測した。また、下肢に各関節中心と重心位置のための反射マーカを取り付け、各関節の座標をモーションキャプチャ(Vicon MXシリーズ)12台により500Hzで計測した。座標データは平滑化スプライン⁽²⁾を用いてデータの平滑化を行い、スプライン関数によって関数近似した。以後、代表的な1試技の支持脚着地時(t_i)を0sとし、ボールインパクト(t_i)直後までの0.15s間のデータを示す。また、支持脚である左足の各リンクに固定された座標系を図5に示した。ここで、リンクの近位側の関節から重心位置方向を向く単位ベクトル e_{y1}, e_{y2}, e_{y3} を各リンクの座標系のy軸を示す単位ベクトルとした。さらにリンク3の座標系は足関節中心を同定する際に外果と内果に貼付したマーカ、リンク1とリンク2の座標系は膝関節中心を同定する際に内外膝関節裂隙に貼付したマーカの、外側から内側のマーカへ向かう単位ベクトルを各々 e_{px2}, e_{px3} とし、各座標系のz軸を示す単位ベクトルを $e_{z1} \equiv e_{px2} \times e_{y1}$, $e_{z2} \equiv e_{px2} \times e_{y2}$, $e_{z3} \equiv e_{px3} \times e_{y3}$ と定義する。そして、各座標系のx軸を示す単位ベクトルを $e_{x1} \equiv e_{y1} \times e_{z1}$, $e_{x2} \equiv e_{y2} \times e_{z2}$, $e_{x3} \equiv e_{y3} \times e_{z3}$ と定義し、以上の操作により各リンクに固定された座標系 $\Sigma_1 = \{e_{x1}, e_{y1}, e_{z1}\}$, $\Sigma_2 = \{e_{x2}, e_{y2}, e_{z2}\}$, $\Sigma_3 = \{e_{x3}, e_{y3}, e_{z3}\}$ を定義した。

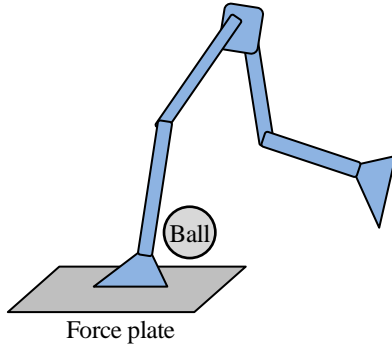


Fig. 4 Schematic image of the experiment

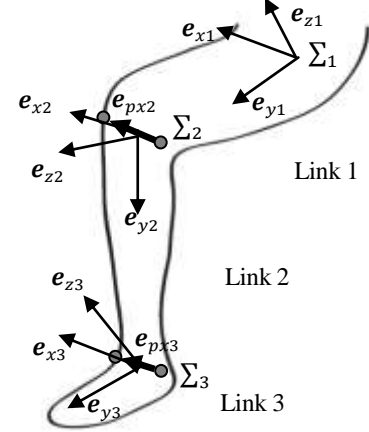


Fig. 5 Local coordinates of support leg

3・2 足関節トルクの推定と比較

式(26)の第4行はリンク3のダイナミクスを表し、式(27)を用いて

$$\hat{M}_3 + \tilde{r}_{33}\varphi_{g3} = \tau_3 - \hat{\tau}_3 \quad (28)$$

と書き換えることができる。図6にリンク3の回転運動に関する動的項 \hat{M}_3 と、モーメントアーム \tilde{r}_{33} によって足関節空間に分配されるリンク3に作用する力 φ_{g3} 、足関節トルク τ_3 と静力学近似より推定された足関節トルク $\hat{\tau}_3$ をリンク3の座標系 Σ_3 で示し、各項を比較して静力学近似の検証を行った。また、図6(a)の上部に支持脚(実線)と蹴り脚(破線)の時系列による姿勢変化を示した。ここで、座標系 Σ_3 はx軸を示す単位ベクトル e_{x3} 周り正方向が背屈、y軸 e_{y3} 周り正方向が回内、z軸 e_{z3} 周り正方向が外転トルクを表す。図6よりリンク3において、各軸で動的項の値が外力項と比較して小さく、足関節トルクの静力学近似($\hat{\tau}_3 \approx \tau_3$)がよく成り立つことが示された。

3・3 膝関節トルクの推定と比較

式(26)の第3行は、式(27)とヤコビ行列(16)を用いて

$$\hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \tilde{r}_{23}\varphi_{g3} + \tilde{r}_{22}\varphi_{g2} = \tau_2 - \hat{\tau}_2 = \tau_2 + \tilde{L}_2 F_g + \tau_z \quad (29)$$

のようにリンク2とリンク3のダイナミクスを書き換えることができる。図7にリンク2の回転運動に関する動的項 \hat{M}_2 と、モーメントアーム $\tilde{r}_{22}, \tilde{r}_{23}$ によって膝関節空間に分配されるリンク2とリンク3に作用する力 $\varphi_{g2}, \varphi_{g3}$ 、膝関節トルク τ_2 と静力学近似により推定されたトルク $\hat{\tau}_2$ をリンク2の座標系 Σ_2 で示し、座標系 Σ_2 で表した自由モ

ーメント τ_z も加えてダイナミクスの各項と比較した. また, \hat{M}_3 も式(29)の動的項に含まれるが, 図6よりその値が他項と比較して小さいため省略する. ここで, 座標系 Σ_2 は x 軸 e_{x2} 周り正方向が伸展, y 軸 e_{y2} 周り正方向が内旋, z 軸 e_{z2} 周り正方向が外反トルクを表す. 着地動作では, リンク2に大きな加速度が生じるため, $\tilde{r}_{22}\varphi_{g2}$ の値が大きい. また, モーメントアーム \tilde{r}_{23} が長いことから, 外積 $\tilde{r}_{23}\varphi_{g3}$ の関係によって値が大きくなり, 推定されたトルク $\tau_2, \hat{\tau}_2$ に小さな差が生じている. リンク2に作用する力とモーメントアームによるベクトル $\tilde{r}_{22}\varphi_{g2}$ は y 軸 e_{y2} に直交しているため, $e_{y2}^T\tilde{r}_{22}\varphi_{g2}$ は零であり, ベクトル $\tilde{r}_{23}\varphi_{g3}$ も y 軸 e_{y2} にほぼ直交しているため, $e_{y2}^T\tilde{r}_{23}\varphi_{g3}$ も零に近い. よって, 図7(b)より y 軸 e_{y2} 周りの膝関節トルクの静力学近似はよく成り立っている. また, y 軸 e_{y2} は床に対して垂直に近いため, 垂直成分のみをもつ自由モーメント τ_z に対する反作用の力が大きい.

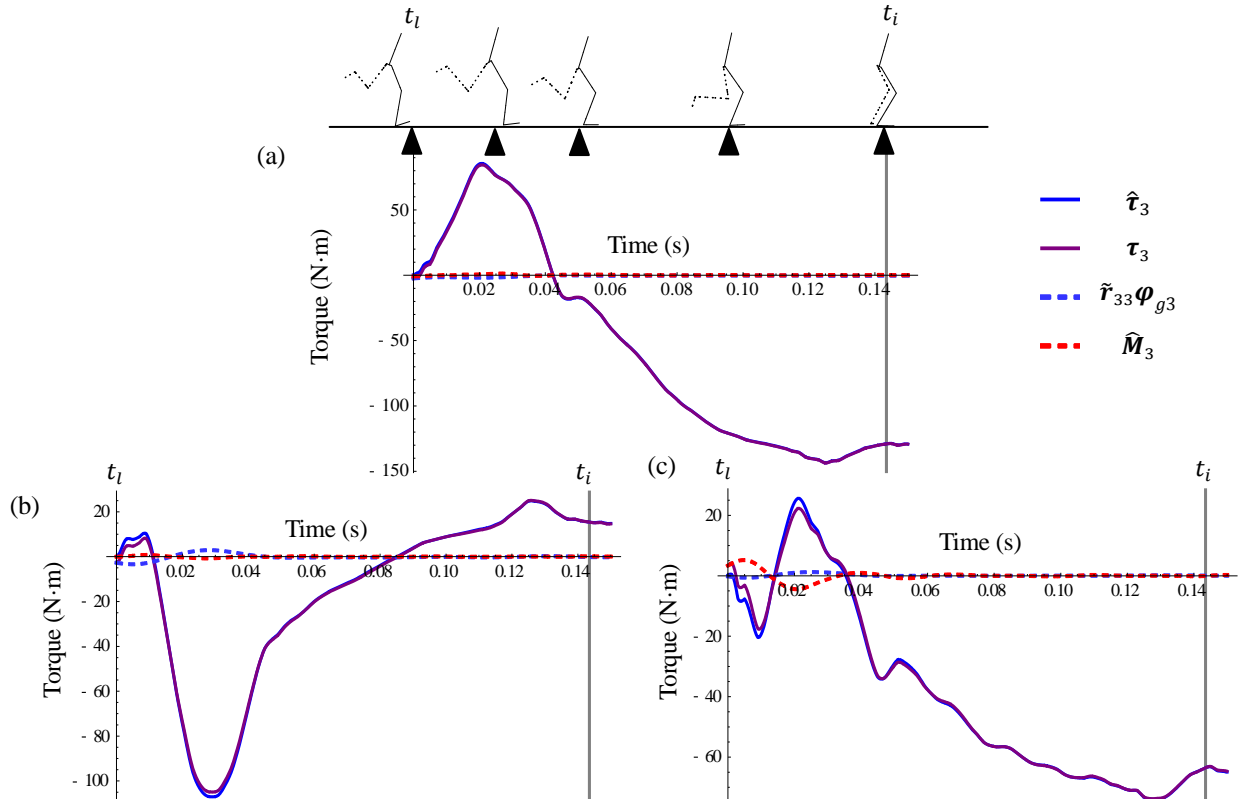


Fig. 6 Comparison between estimated ankle torque ($\hat{\tau}_3$: statics, τ_3 : IDP) and dynamic terms of equation of motion in local coordinate system (Σ_3) about (a) x axis (e_{x3}), (b) y axis (e_{y3}) and (c) z axis (e_{z3})

3・4 股関節トルクの推定と比較

式(26)の第2行は全てのリンクを含んだダイナミクスを表し, 式(27)を用いて

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \tilde{r}_{13}\varphi_{g3} + \tilde{r}_{12}\varphi_{g2} + \tilde{r}_{11}\varphi_{g1} = \tau_1 - \hat{\tau}_1 \quad (30)$$

と書き換えることができる. 図8にリンク1とリンク2の回転運動に関する動的項 \hat{M}_1, \hat{M}_2 と, モーメントアーム $\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}$ によって股関節空間に分配される各リンクに作用する力 $\varphi_{g1}, \varphi_{g2}, \varphi_{g3}$, 股関節トルク τ_1 と静力学近似より推定されたトルク $\hat{\tau}_1$ をリンク1の座標系 Σ_1 で示した. また, \hat{M}_3 も式(30)の動的項に含まれるが, 図6より値が他項と比較して小さいため省略する. ここで, 座標系 Σ_1 は x 軸 e_{x1} 周り正方向が屈曲, y 軸 e_{y1} 周り正方向が内旋, z 軸 e_{z1} 周り正方向が外転トルクを表す. 3.3節に示したリンク2とリンク3のダイナミクスと同様に, リンク2に作用する力 φ_{g2} の値が大きい他, モーメントアーム $\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}$ が長いから, リンクの力 $\varphi_{g2}, \varphi_{g3}$ が股関節トルクに分配される. また, リンク1の慣性モーメント I_1 が大きく, 大腿の角加速度 $\dot{\omega}_1$ も比較的大きいため, 動的項 \hat{M}_1 も股関節トルクに作用する.

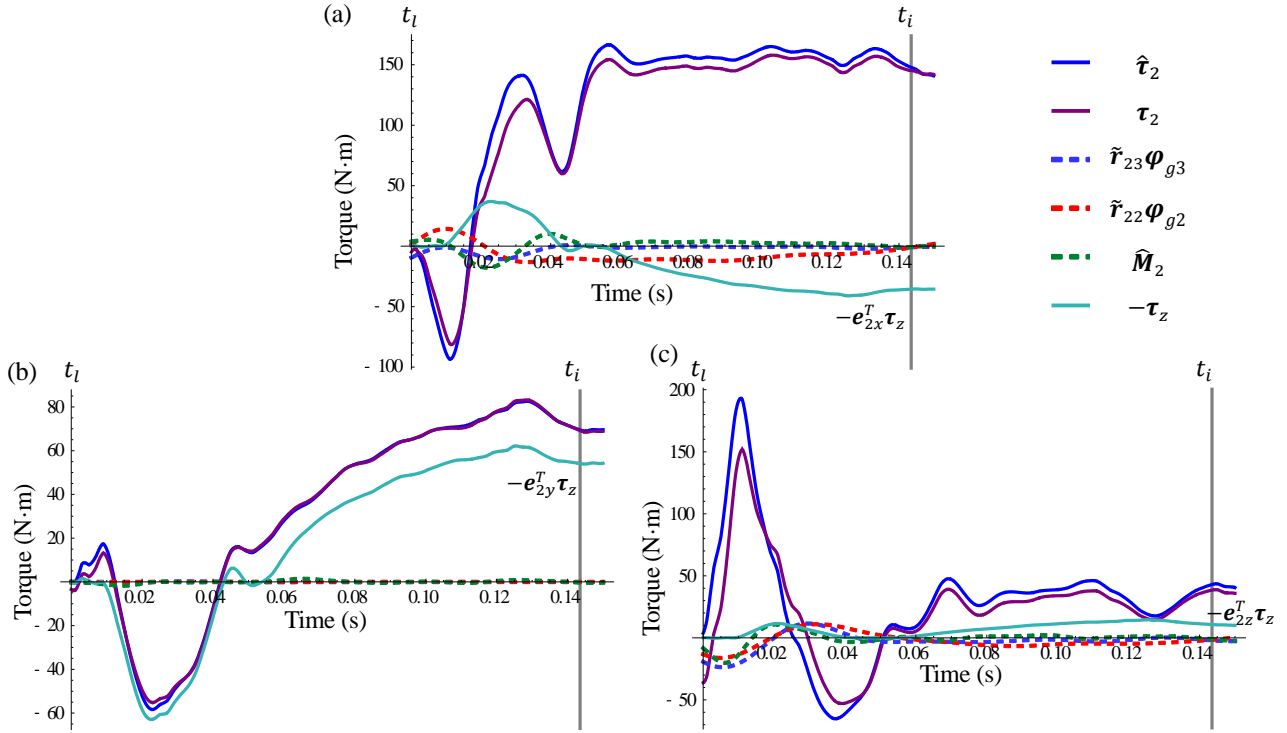


Fig. 7 Comparison between estimated knee torque ($\hat{\tau}_2$: statics, τ_2 : IDP) and dynamic terms of equation of motion in local coordinate system of link 2 (Σ_2) about (a) x axis (e_{x2}), (b) y axis (e_{y2}) and (c) z axis (e_{z2})

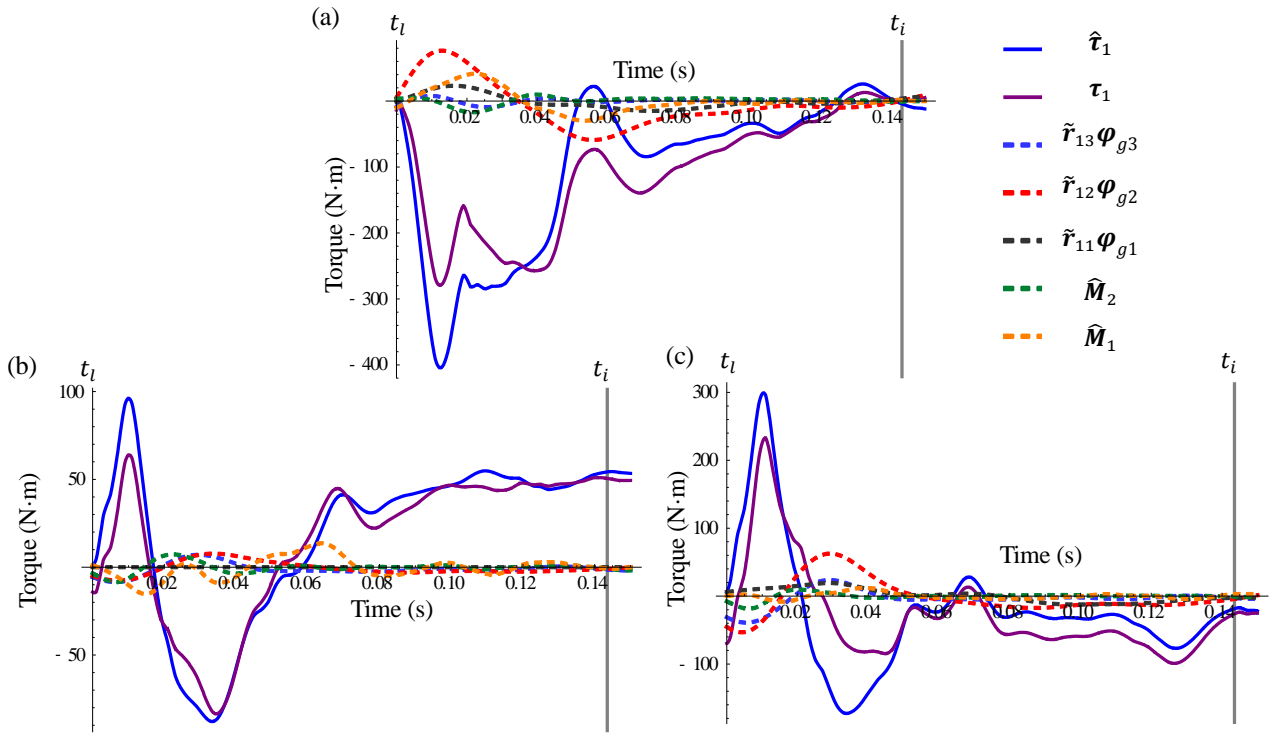


Fig. 8 Comparison between estimated hip torque ($\hat{\tau}_1$: statics, τ_1 : IDP) and dynamic terms of equation of motion in local coordinate system of link 1 (Σ_1) about (a) x axis (e_{x1}), (b) y axis (e_{y1}) and (c) z axis (e_{z1})

4. 考察

4・1 姿勢を介した関節トルクと床反力の関係

各リンクのニュートン・オイラーの運動方程式(3)～(8)各々を変形し加算することで、力の釣合い式の形を含むダイナミクス(26)を導出した。そこで、外力項と比較して動的項の値が小さく、静力学近似が成り立つ場合、ヤコビ行列 \mathbf{J} と床反力・自由モーメントベクトル \mathbf{f} の積 $\mathbf{J}^T \mathbf{f}$ より、各関節トルクが推定される。ここで、ヤコビ行列は姿勢を表し、静力学的な関係から各関節トルクと床反力・自由モーメントをマッピングする座標変換行列を意味する。すなわち、姿勢の変化による各関節トルクと床反力・自由モーメントの関係に関する議論が可能となる。例えば、式(29)から静力学近似により力の釣合い式を導出し、内外反トルクに関するz軸成分を単位ベクトル \mathbf{e}_{z2} との内積により抽出すると

$$\mathbf{e}_{z2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2 = -\mathbf{e}_{z2}^T \tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g - \mathbf{e}_{z2}^T \boldsymbol{\tau}_z \quad (31)$$

を得る。小笠原ら⁽¹⁾は前十字靭帯損傷のメカニズムのひとつと考えられる膝関節z軸 \mathbf{e}_{z2} 周りの外反トルク $\mathbf{e}_{z2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ に着目している。 \mathbf{e}_{z2} と自由モーメントベクトル $\boldsymbol{\tau}_z$ はほぼ直交するため、 $\mathbf{e}_{z2}^T \boldsymbol{\tau}_z$ の値は小さいことから、図9(a)のように姿勢を表す位置ベクトル \mathbf{L}_2 と床反力ベクトル \mathbf{F}_g との外積 $\tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g$ (膝関節に作用する力のモーメント)と、そのうち外反トルクを反映する $\mathbf{e}_{z2}^T \tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g$ によって、怪我のリスク評価の方法を導いた。これにより、図9(a)の内股のような姿勢は大きな外反トルクが作用し、前十字靭帯の損傷のリスクを高める危険な姿勢といえる。

ここで、外反トルクに加え、y軸 \mathbf{e}_{y2} 周りの内旋トルクが作用する場合に、より大きな張力が前十字靭帯に作用する⁽³⁾⁽⁴⁾と報告されていることを踏まえると、自由モーメントを含めた力の釣合い式(27)を用いることで、外反トルクと内旋トルク双方の前十字靭帯損傷に対する議論が可能となる。式(29)から静力学近似により力の釣合い式を導出し、内外旋トルクに関するy軸成分を \mathbf{e}_{y2} との内積により抽出すると

$$\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2 = -\mathbf{e}_{y2}^T \tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g - \mathbf{e}_{y2}^T \boldsymbol{\tau}_z \quad (32)$$

を得る。ここで、y軸の単位ベクトル \mathbf{e}_{y2} と位置ベクトル \mathbf{L}_2 の成す角度が小さいため、 \mathbf{e}_{y2} と $\tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g$ はほぼ直交する関係にあることから、 $\mathbf{e}_{y2}^T \tilde{\mathbf{L}}_2 \mathbf{F}_g$ の値は小さい。したがって、図7(b)に示すように自由モーメント $\mathbf{e}_{y2}^T \boldsymbol{\tau}_z$ に対する反作用の力がy軸周りの内外旋トルク $\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ において支配的($\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2 \approx -\mathbf{e}_{y2}^T \boldsymbol{\tau}_z$)となる。また、 $\boldsymbol{\tau}_z$ が鉛直方向のみに成分をもつことを踏まえると、絶対座標系における鉛直z軸方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_{zg} とするならば、 \mathbf{e}_{zg} との内積 $\mathbf{e}_{zg}^T \boldsymbol{\tau}_z$ により $\boldsymbol{\tau}_z$ の鉛直成分を抽出できる。図9(b)に示すように、リンク2のy軸 \mathbf{e}_{y2} が床に対して垂直に近いほど、y軸 \mathbf{e}_{y2} と自由モーメント $\boldsymbol{\tau}_z$ の方向 \mathbf{e}_{zg} が近くなり、 $\mathbf{e}_{y2} \approx -\mathbf{e}_{zg}$ となる。その結果、膝関節の内外旋トルク $\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ に作用する自由モーメントは $\mathbf{e}_{zg}^T \boldsymbol{\tau}_z \approx -\mathbf{e}_{y2}^T \boldsymbol{\tau}_z$ となり、式(32)より、 \mathbf{e}_{y2} と \mathbf{e}_{zg} の方向が逆向きに近いほど $\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2 \approx \mathbf{e}_{zg}^T \boldsymbol{\tau}_z$ となり、内旋トルク $\mathbf{e}_{y2}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}_2$ に大きく作用する。ゆえに、大きな自由モーメントが作用する場合、リンク2で

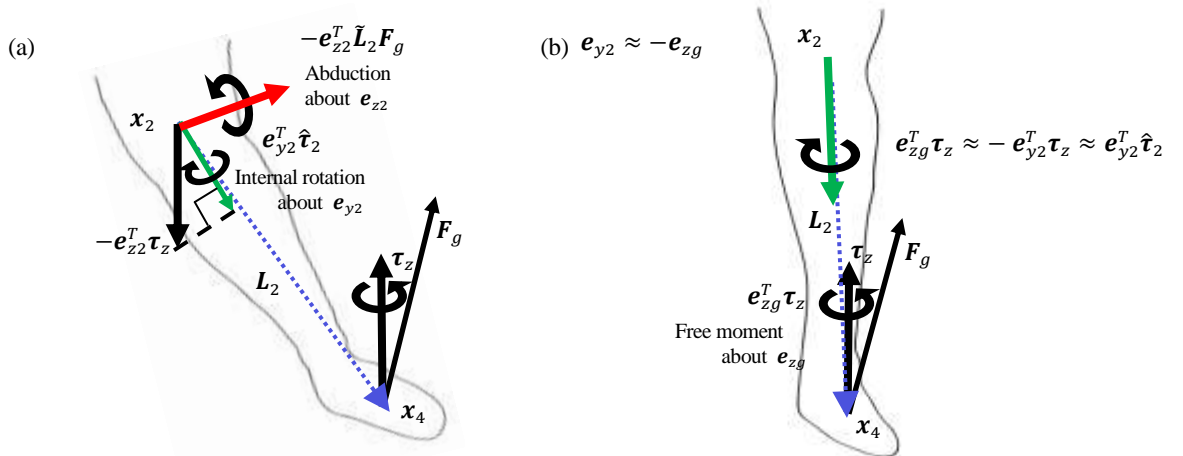


Fig. 9 Geometric relation between knee torque of left leg (internal rotation (y axis in green) and abduction (z axis in red)) and external force with change in posture (position vector \mathbf{L}_2 in purple)

ある下腿が垂直な姿勢は過大な内旋トルクを与えうる危険な姿勢と言える。すなわち、怪我のリスクに対しての姿勢に関する議論が可能となり、姿勢による明解なフィードバックを競技者に与えることができる。本研究の提案手法は、外力と関節トルク、姿勢の関係による議論が可能な問題、例えばシューズのソール性能と姿勢が関節トルクに影響する問題などを考えるうえで貢献しうると考えられる。

4・2 静力学近似の推定精度

足関節トルク τ_3 と膝関節トルク τ_2 のy軸 e_{y2} 周りの内旋トルクを含むダイナミクスにおいて、動的項の値が外力項と比較して小さいため、静力学を基にした力の釣合い式より関節トルクを高い精度で推定できた。これに対して、動的項の値が外力項と比較して大きい場合を考えるには、式(26)に着目する必要がある。ダイナミクス(26)左辺の各項のうち、 $\dot{\mathbf{r}}\boldsymbol{\varphi}$ (下付き文字によらず)は、関節位置とリンク重心位置によって決定されるモーメントアームとリンク重心に作用する並進の力との外積でつくられる動的項を意味していることから、この動的項は姿勢によって関節トルクに影響を与えることが明らかである。すなわち、4.1節で述べた姿勢を介した外力と関節トルクとの関係と同様に、怪我のリスクを高めるような危険な姿勢を、この動的項 $\dot{\mathbf{r}}\boldsymbol{\varphi}$ からも推定することが可能であると考えられる。ここでリンク重心に作用する力を推定するために、各リンクの重心位置にウェアラブルな慣性センサを装着し、計測された加速度データをダイナミクスの動的項に代入することで、動的項による影響が大きい場合の関節トルクの推定精度向上が期待される。

本提案手法の課題は、関節トルクを推定する際に各関節位置から COP 位置へと向かうベクトルと、床反力・自由モーメントベクトルとの幾何学的関係を用いるため、推定された COP 位置に誤差が生じると各関節から COP 位置へ向かうベクトルが変わることにより、推定された各関節トルクに大きな誤差が生じる。そのため、COP 位置の高精度計測が要求される。したがって、現状では、床反力計や足底板型の力センサなどを用いて COP 位置を推定する必要がある。

5. 結言

サッカーのキックにおける支持脚着地動作を事例とし、静力学を基にした力の釣合い式で支持脚の各関節トルクを推定した。また、逆動力学で推定した関節トルクと運動方程式における各動的項とを比較することで、静力学近似による関節トルクの推定精度を検証した。足関節トルクでは、動的項の影響は極めて小さいため、静力学近似による関節トルクの推定精度は高かった。一方、膝および股関節では静力学近似によって推定された関節トルクと、逆動力学によって推定された関節トルクに差異が生じた。この差異を生む主な要因は、各リンクに作用する並進の力によるものであった。今後は、これをリンクの重心位置付近に装着した慣性センサを用いて推定し、補うことで関節トルクの推定精度が向上できると考えられる。本研究の静力学近似による関節トルクの推定手法により、姿勢を示すヤコビ行列を介した外力と各関節トルクとの関係が導かれた。本提案手法では姿勢を介した、外力と関節トルクとの関係を幾何学的に表せるため、4.1節で例に挙げた前十字靭帯損傷のように、姿勢のとりかたによって、外力が関節トルクに及ぼす影響、さらにはそのリスクを明解に議論することが可能になったといえる。

文献

- (1) 小笠原一生, 太田憲, “静力学を用いた膝前十字靭帯損傷のリスク評価”, シンポジウム: スポーツ・アンド・ヒューマン・ダイナミクス 2009, (2009), pp. 247-252.
- (2) Hodrick, R.J., and Prescott, E.C., “Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 29, No. 1 (1997), pp. 1-16.
- (3) Alentorn-Geli, E., Myer, G.D., Silvers, H.J., Samitier, G., Romero, D., Lazaro-Haro, C., and Cugat, R., “Prevention of non-contact anterior cruciate ligament injuries in soccer players. Part 1: Mechanisms of injury and underlying risk factors”, *Knee Surgery, Sports Traumatology, Arthroscopy*, Vol. 17, No. 7 (2009), pp. 705-729.
- (4) Shin, C.S., Chaudhari, A.M., and Andriacchi, T.P., “Valgus plus internal rotation moments increase anterior cruciate ligament strain more than either alone”, *Medicine and Science in Sports and Exercise*, Vol. 43, No. 8 (2011), pp. 1484-1491.